30.01.25

1.3.8 Soit l'application linéaire définie par $h((x;y;z)) = (x-y; x+5y)$.

a) Déterminer la matrice H de h relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.

b) Déterminer la matrice H^* de h relativement aux bases $\mathcal{B}_1^* = ((0;1;1),(1;0;1),(1;0;0))$ de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}_2^* = ((-3;-4),(4;5))$ de $\mathbb{R}^2$.

c) Calculer les composantes relativement à la base $\mathcal{B}_1^*$ de $u = (-1;5;6)$ et les composantes de son image par h dans la base $\mathcal{B}_2^*$.

a) $h\big((x,y,z)\big) = (x-y\,,\ x+5y)$

$$\boxed{\begin{aligned} h :\ & \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) \longmapsto (x-y, x+5y) \end{aligned}}$$

expression fonctionnelle de l'application linéaire h

$B_1 = (e_1, e_2, e_3)$ base canonique de $\mathbb{R}^3$.

$B_2 = (f_1, f_2)$ base canonique de $\mathbb{R}^2$.

La matrice H de cette application linéaire

$$H = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} h(e_1) & h(e_2) & h(e_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$$

b)

$$\begin{tikzcd} (\mathbb{R}^3, B_1) \arrow[r, "H"] & (\mathbb{R}^2, B_2) \\ (\mathbb{R}^3, B_1^*) \arrow[u, "P"] \arrow[r, "H^*"] & (\mathbb{R}^2, B_2^*) \arrow[u, "Q"'] \end{tikzcd}$$

Matrice de changement de base de B_1^* à B_1 : $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (id)^{B_1}_{B_1^*}$

Matrice de changement de base de B_2^* à B_2 : $Q = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} = (id)^{B_2}_{B_2^*}$

Calculons H^* : $H^* = Q^{-1} \cdot H \cdot P$

On calcule Q^{-1} : $Q^{-1} = \dfrac{1}{1}\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$

CRM, page 25

Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors $\boxed{A^{-1} = \dfrac{1}{\mathrm{Det}(A)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}$ avec $\mathrm{Det}(A) = ad - bc$.

$$H^* = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -25 & 1 & 1 \\ -19 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2×2   2×3   3×3

2×3

$$\boxed{\text{Donc } H^* = \begin{pmatrix} -25 & 1 & 1 \\ -19 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

c) Calculer les composantes relativement à la base $\mathcal{B}_1^\star$ de $u = (-1; 5; 6)$ et les composantes de son image par h dans la base $\mathcal{B}_2^\star$.

$u = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}_{B_1}$ dans B_1 ; déterminons u dans la base B_1^*.

$u^* = P^{-1} \cdot u$. Il faut calculer P^{-1} :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L_2 \leftrightarrow L_1}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\approx \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \underbrace{\begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{matrix}}_{P^{-1}} \\ 0 & 0 & 1 & \end{array}\right)$$

$$u^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}_{B_1} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}_{B_1^*}$$

$$h(u^*) = \begin{pmatrix} -25 & 1 & 1 \\ -19 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -126 \\ -96 \end{pmatrix}$$