Exercice 1

1) $S_1 = \sum_{K=1}^{+\infty} (-1)^{K+1} \frac{1}{K^2}$

Comme $\sum_{K=1}^{+\infty} \frac{1}{K^2}$ est une série de Riemann qui converge, alors S_1 est une série qui converge absolument. Donc S_1 converge

$$\sum_{K=1}^{7} (-1)^{K+1} \frac{1}{K^2} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} \cong 0{,}831$$

Cette suite alternée vérifie le critère de Leibniz :

$$\lim_{K \to +\infty} \frac{1}{K^2} = 0 \quad \text{et} \quad U_{K+1} = \frac{1}{(K+1)^2} < \frac{1}{K^2} = U_K$$

Dans ce cas, $\sum_{K=1}^{7} (-1)^{K+1} \frac{1}{K^2}$ est une estimation par excès.

L'erreur est inférieure à $\frac{1}{8^2} \cong 0{,}016$.

Donc $S_1 \in \left] 0{,}815 ; 0{,}831 \right[$

2) $S_2 = \sum_{K=1}^{+\infty} \frac{1}{K} \left(\frac{1}{5}\right)^K$

On a : $\frac{1}{K} \cdot \frac{1}{5^K} < \frac{1}{5^K}$. Comme $\sum_{K=1}^{+\infty} \frac{1}{5^K}$ est une série géométrique convergente $r = \frac{1}{5} < 1$, alors S_2 est convergente. (critère de comparaison).

$$\sum_{K=1}^{5} \frac{1}{K} \left(\frac{1}{5}\right)^K = \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^3 + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^4 + \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^5 \cong 0{,}22313$$

C'est une estimation par défaut. Calculons l'erreur :

$$\sum_{k=6}^{+\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{5}\right)^k \leqslant \sum_{k=6}^{+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^k = \left(\frac{1}{5}\right)^6 \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^k = \left(\frac{1}{5}\right)^6 \frac{1}{1-\frac{1}{5}} = \left(\frac{1}{5}\right)^6 \cdot \frac{5}{4}$$

$$= 0{,}00008$$

$$\Rightarrow S_2 \in \left]0{,}22313 ; 0{,}22321\right[$$

Exercice 2

$$U_k = \frac{k}{27^k} \cdot x^{3k} = \frac{k}{27^k} (x^3)^k$$

Posons $x^3 = y$ et $a_k = \dfrac{k}{27^k}$.

Rayon de convergence pour y :

$$R_y = \lim_{k\to+\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \lim_{k\to+\infty} \frac{k \cdot 27^{k+1}}{27^k\,(k+1)} = \lim_{k\to+\infty} \frac{27\,k}{k+1} = 27$$

donc $-27 < y < 27 \Rightarrow \underline{-3 < x < 3}$

Le rayon de convergence est égal à 3.

- $\underline{x = 3}$: $U_k = \dfrac{k}{27^k} \cdot 3^{3k} = \dfrac{k}{\cancel{(3^3)^k}} \cdot \cancel{(3^3)^k} = k$

$\sum_k k$ diverge.

- $\underline{x = -3}$: $U_k = \dfrac{k}{3^{3k}} \cdot (-3)^{3k} = (-1)^{3k}\, k = (-1) \cdot k$

$\sum_k (-1)\, k$ diverge

Le rayon de convergence est $\left]-3 ; 3\right[$

Exercice 3

1) $e^{x} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{k}}{k!}$

- $e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + \dots$

- $1 - e^{-x} = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$

- $f(x) = \frac{1-e^{-x}}{x} = 1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} - \frac{x^3}{4!} + \frac{x^4}{5!} - \dots = \underline{\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^{k-1}}{k!}}$

2) $$\int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x}\,dx = \int_0^1 \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^{k-1}}{k!}\,dx = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \int_0^1 \frac{x^{k-1}}{k!}\,dx$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \left. \frac{x^{k}}{k \cdot k!} \right|_0^1 = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k \cdot k!}$$

$$\Rightarrow U_k = \frac{1}{k \cdot k!}$$

3) $$\tilde{I} = \sum_{k=1}^{6} (-1)^{k+1} \frac{1}{k \cdot k!} = 1 - \frac{1}{2 \cdot 2!} + \frac{1}{3 \cdot 3!} - \frac{1}{4 \cdot 4!} + \frac{1}{5 \cdot 5!} - \frac{1}{6 \cdot 6!} \simeq 0{,}79657$$

4) Erreur : $\frac{1}{7 \cdot 7!} \cong 0{,}000028$

Exercice 4

- $f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$, $f(1) = 1$

$f'(x) = -2x^{-3}$, $f'(1) = -2$

$f''(x) = 6x^{-4}$, $f''(1) = 6$

$$P_2(x) = 1 - 2(x-1) + 6\frac{(x-1)^2}{2!} = 1 - 2x + 2 + 3x^2 - 6x + 3$$

$$\underline{P_2(x) = 3x^2 - 8x + 6}$$

- $P_2(0{,}9) = 1{,}23$ $\qquad f^{(3)}(x) = \left(6x^{-4}\right)' = -24x^{-5}$

Erreur : $R_2(0{,}9) = \dfrac{(0{,}9-1)^3}{3!} f^{(3)}(c) = \dfrac{-0{,}001}{6} \cdot \dfrac{-24}{c^5} = \dfrac{0{,}004}{c^5}$

où $0{,}9 < c < 1$

Comme $R_3(0{,}9) > 0$, c'est une estimation par défaut.

$$R_2(0{,}9) \leq \frac{|0{,}9-1|^3}{3!} \sup_{t\in[0{,}9;1]} \left| f^{(3)}(t) \right|$$

$$= \frac{0{,}001}{6} \sup_{t\in[0{,}9;1]} \frac{24}{t^5} = \frac{0{,}001}{6} \cdot \frac{24}{0{,}9^5}$$

$$= \frac{0{,}004}{0{,}9^5} \simeq 0{,}0068$$