3.1 (page 68)

$$(x-2)\,y'' + 3y = x \qquad \begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

$$y'' + \frac{3}{x-2}\,y = \frac{x}{x-2}$$

$a_1(x) = 0$

$a_0(x) = \frac{3}{x-2}$

$g(x) = \frac{x}{x-2}$

Selon le théorème 3.1, $a_1(x)$, $a_0(x)$ et $g(x)$ doivent être des fonctions continues sur un intervalle I

Comme $x_0 = 0$ doit être dans cet intervalle, il n'y a pas d'autre choix que de prendre

$$I =]-\infty ; 2[$$

3.2 (page 69)

$y'' - y = 0$

a comme solution $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x}$

Comme $y(0) = 0$

$y'(0) = 1$

alors $\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 - C_1 = 1 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} C_1 = \frac{1}{2} \\ C_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$

3.3 (page 69)

$$y'' = \sin(x)$$

$$y' = -\cos(x) + a$$

$$y = -\sin(x) + ax + b$$

$$\begin{aligned} y\left(\tfrac{\pi}{2}\right) &= 0 \Rightarrow \\ y'\left(\tfrac{\pi}{2}\right) &= -2 \Rightarrow \end{aligned} \begin{cases} -1 + a\frac{\pi}{2} + b = 0 \\ a = -2 \end{cases} \quad b = 1 + \pi$$

$$y = -\sin(x) - 2x + 1 + \pi$$

3.4 (page 69)

$L[y] = y'' - 4y' + 3y$

a) $L[x^2] = 2 - 4 \cdot 2x + 3x^2 = 3x^2 - 8x + 2$

b) $L[e^{3x}] = 9e^{3x} - 4 \cdot 3e^{3x} + 3e^{3x} = 0$

c) $L[e^{rx}] = r^2 e^{rx} - 4 \cdot re^{rx} + 3e^{rx} = (r^2 - 4r + 3)e^{rx}$

3.5 page 69

$y'' - y = 2e^x$

$$\left.\begin{array}{l} y = xe^x \\ y' = (x+1)e^x \\ y'' = (x+2)e^x \end{array}\right\} \quad (x+2)e^x - xe^x = 2e^x$$

donc $y = xe^x$ est une solution.

Nous avons vu que $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$ est une solution de l'équation homogène.

Ainsi $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + xe^x$ est la solution générale.

3.6 (page 69)

$f_1(x) = x$

$f_2(x) = x + e^x$

$f_3(x) = 1 + x + e^x$

- $\Delta > 0$, on a $r_1 = 0$ et $r_2 = 1$ $y = C_1 + C_2 e^x$
- x est un sol. particulière.

Ainsi $y = C_1 + C_2 e^x + x$ est la sol. générale.

3.7 (page 69)

a) $y'' - y = 2 - x^2 \qquad (*)$

L'équation caractéristique est $r^2 - 1$, qui admet les solutions $r_1 = 1$ et $r_2 = -1$.

La solution de l'équation homogène associée est

$$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x}$$

Recherchons une solution particulière.

On choisit un polynôme de degré 2 :

$$y_p(x) = ax^2 + bx + c$$

D'où : $y_p'(x) = 2ax + b$ et $y_p''(x) = 2a$.

En remplaçant dans l'équation $(*)$

$$2a - ax^2 - bx - c = 2 - x^2$$

$$-ax^2 - bx + (2a - c) = -x^2 + 2$$

On obtient :

$$\begin{cases} -a = -1 & \Rightarrow a = 1 \\ -b = 0 & \Rightarrow b = 0 \\ 2a - c = 2 & \Rightarrow c = 0 \end{cases}$$

La solution de l'équation générale est

$$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} + x^2$$

b) avec a) on a la solution de l'équation homogène : $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x}$

Recherchons une solution particulière de l'équation

$$\underline{y'' - y = 2e^{x} + 2 - x^2}$$

On doit avoir $y_p(x) = x^2 + y_{p_0}(x)$

On voit qu'on ne peut pas choisir

$$y_{p_0}(x) = C_3 e^{x}$$

On essaie donc avec $y_{p_0}(x) = C_3 x e^{x}$

$$y'_{p_0}(x) = C_3 e^{x} + C_3 x e^{x} = C_3 (1+x) e^{x}$$

$$y''_{p_0}(x) = C_3 (2+x) e^{x}$$

En substituant dans l'ED (sans considérer $2-x^2$), on obtient

$$C_3 (2+x) e^{x} - C_3 x e^{x} = 2e^{x}$$

$$C_3 e^{x} [2 + x - x] = 2e^{x} \Rightarrow C_3 = 1$$

La solution est :

$$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} + x^2 + x e^{x}$$

3.8 (page 69)

Calculons le Wronskien de y_1 et y_2

a) $y_1 = x^2 \qquad y_1' = 2x$

$y_2 = 1-x \qquad y_2' = -1$

$$W(x) = \begin{vmatrix} x^2 & 1-x \\ 2x & -1 \end{vmatrix} = -x^2 - 2x(1-x)$$
$$= -x^2 - 2x + 2x^2$$
$$= x^2 - 2x$$

$W(x) = 0 \iff x = 0$ ou $x = 2$

Sur $]-\infty, 0[$, $]0, 2[$ ou $]2, +\infty[$ y_1 et y_2 sont linéairement indépendantes

b) $y_1 = \cos(x) + \sin(x) \qquad y_2 = \cos(x) - \sin(x)$

$y_1' = -\sin(x) + \cos(x) \qquad y_2' = -\sin(x) - \cos(x)$

$$W(x) = \begin{vmatrix} \cos(x) + \sin(x) & \cos(x) - \sin(x) \\ -\sin(x) + \cos(x) & -\sin(x) - \cos(x) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2\cos(x) & \cos(x) - \sin(x) \\ -2\sin(x) & -\sin(x) - \cos(x) \end{vmatrix}$$

$$= 2 \begin{vmatrix} \cos(x) & \cos(x) - \sin(x) \\ -\sin(x) & -\sin(x) - \cos(x) \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} \cos(x) & -\sin(x) \\ -\sin(x) & -\cos(x) \end{vmatrix}$$

$$= 2\left(-\cos^2(x) - \sin^2(x)\right) = -2$$

3.9 (page 69)

a) $W(x) = \begin{vmatrix} e^x & \sin(x) \\ e^x & \cos(x) \end{vmatrix} = e^x(\cos(x) - \sin(x))$

$\cos(x) = \sin(x) \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{2} - x = x + 2k\pi & \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ \frac{\pi}{2} - x = (\pi - x) + 2k\pi & \Rightarrow \lightning \end{cases}$

donc, il existe $t_0 \in I$ tq $W(t_0) = 0$ (ici $t_0 = \frac{\pi}{4}$).

Soit y_1, y_2 deux fonctions différentiables dans un intervalle ouvert I.

On suppose qu'il existe $t_0 \in I$ tel que $W(y_1, y_2)(t_0) \neq 0$. Alors y_1 et y_2 sont linéairement indépendantes dans I.

Si, au contraire, y_1 et y_2 sont linéairement dépendantes dans I, alors $W(y_1, y_2)(t) = 0 \quad \forall t \in I$

3.10 (page 69)

a) $y'' - y' - 12y = 0$

équation caractéristique: $r^2 - r - 12 = 0$

$(r-4)(r+3) = 0$

les sol. sont : $y_1 = c_1 e^{4x}$ et $y_2 = c_2 e^{-3x}$

b) $4y'' - 4y' + y = 0$ $\quad$ $4r^2 - 4r + 1 = 0$

$(2r-1)^2 = 0$

$y_1 = c_1 e^{x/2}$ et $y_2 = c_2 x e^{x/2}$

3.11

a) $y'' + 2y' - 3y = 0$

éq. caractéristique : $r^2 + 2r - 3 = 0$

$(r+3)(r-1) = 0$

$y_1 = C_1 e^{-3x}$ et $y_2 = C_2 e^{x}$

b) $6y'' - y' - y = 0$

ec: $6r^2 - r - 1 = 0$

$(3y+1)(2y-1) = 0$

$y_1 = C_1 e^{-x/3}$, $y_2 = C_2 e^{x/2}$

c) $y'' - 2y' + y = 0$

ec: $r^2 - 2r + 1 = 0 \Rightarrow r = 1$

$y_1 = C_1 e^{x}$, $y_2 = C_2 x e^{x}$

d) $25y'' - 20y' + 4y = 0$

ec: $(5r-2)^2 = 0$

$y_1 = C_1 e^{2x/5}$ et $y_2 = C_2 x e^{2x/5}$

e) $y'' - 2y + 10 = 0$

ec: $r^2 - 2r + 10 = 0$ $\Delta = 4 - 40 = -36 = 36i^2$

$r_1 = \frac{2-6i}{2} = 1 - 3i$ et $r_2 = 1 + 3i$

$y_1 = C_1 \cos(3x) e^{x}$, $y_2 = C_2 \sin(3x) e^{x}$

f) $y'' + 6y' + 13y = 0$

ec: $r^2 + 6r + 13 = 0$ $\Delta = 36 - 52 = -16 = (4i)^2$

$r_1 = -3 - 2i$ et $r_2 = -3 + 2i$

$y_1 = C_1 \cos(2x) e^{-3x}$, $y_2 = C_2 \sin(2x) e^{-3x}$

3.12 (page 69)

a) $y'' + 16y = 0$

éq. car. $r^2 + 16 = 0$ $\quad r = \pm 4i$

$y_1 = C_1 e^{0.x} \cdot \cos(4x)$

$y_2 = C_2 e^{0x} \sin(4x)$

$y = C_1 \cos(4x) + C_2 \sin(4x)$

$y' = -4 C_1 \sin(4x) + 4 C_2 \cos(4x)$

D'où le système :

$\begin{cases} 2 = C_1 \\ -2 = 4 C_2 \end{cases}$ $\quad y = 2\cos(4x) - \frac{1}{2}\sin(4x)$

b) $y'' + 6y' + 5y = 0$ $\quad r^2 + 6r + 5 = 0 \Leftrightarrow r = \begin{cases} -5 \\ -1 \end{cases}$

$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-5x}$

$y' = -C_1 e^{-x} - 5C_2 e^{-5x}$

$\begin{cases} 0 = C_1 + C_2 \\ 3 = -C_1 - 5C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -C_1 = C_2 \\ 3 = 4C_1 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} C_1 = 3/4 \\ C_2 = -3/4 \end{matrix}$

$y = \frac{3}{4} e^{-x} - \frac{3}{4} e^{-5x}$

c) $y'' - y' + \frac{1}{4} y = 0$ eq $r^2 - r + \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow r = \frac{1}{2}$

$$y = C_1 e^{1/2 x} + C_2 x e^{1/2 x}$$

$$y' = \frac{C_1}{2} e^{1/2 x} + \frac{C_2}{2} x e^{1/2 x} + C_2 e^{1/2 x}$$

$$\begin{array}{ll} y(0) = 2 & \\ y'(0) = \frac{1}{3} & \end{array} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 2 \\ \frac{1}{2} C_1 + C_2 = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow C_2 = -1 + \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}$$

$$y = 2 e^{1/2 x} - \frac{2}{3} x e^{1/2 x}$$

3,13 (page 69)

a) $y'' - 3y' - 4y = 3e^{2x}$

Résolvons l'équation homogène :

$$r^2 - 3r - 4 = 0 \iff (r-4)(r+1) = 0$$

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{4x}$$

Trouvons une solution particulière :

$g(x) = \alpha e^{kx}$, donc $g'(x) = \alpha k e^{kx}$, $g''(x) = \alpha k^2 e^{kx}$

Substituons dans l'équation différentielle :

$$\alpha k^2 e^{kx} - 3\alpha k e^{kx} - 4\alpha e^{kx} = 3e^{2x}$$

$$(\alpha k^2 - 3\alpha k - 4\alpha) e^{kx} = 3e^{2x}$$

$$\begin{cases} k = 2 \\ 4\alpha - 6\alpha - 4\alpha = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} k = 2 \\ \alpha = -\frac{1}{2} \end{array}$$

$$g(x) = -\frac{1}{2} e^{2x}$$

b) $y'' - 3y' - 4y = 2\sin(x)$

Choisissons $g(x) = C_1 \sin(x) + C_2 \cos(x)$

$g'(x) = C_1 \cos(x) - C_2 \sin(x)$

$g''(x) = -C_1 \sin(x) - C_2 \cos(x)$

Substituons :

$$-C_1\sin(x) - C_2\cos(x) - 3\big(C_1\cos(x) - C_2\sin(x)\big) - 4\big(C_1\sin(x) + C_2\cos(x)\big)$$
$$= 2\sin(x)$$

d'où le système :

$$\begin{cases} -C_1 + 3C_2 - 4C_1 = 2 \\ -C_2 - 3C_1 - 4C_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5C_1 + 3C_2 = 2 \\ -3C_1 - 5C_2 = 0 \end{cases} \left| \begin{array}{cc} C_2 & C_1 \\ \cdot 5 & \cdot 3 \\ \cdot 3 & \cdot(-5) \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} -34C_1 = 10 \\ 34C_2 = 6 \end{cases} \Rightarrow \quad C_1 = \frac{-5}{17} \quad C_2 = \frac{3}{17}$$

$$g(x) = \frac{-5}{17}\sin(x) + \frac{3}{17}\cos(x)$$

3.13 (pg 69)

c) $g(x) = \alpha e^x \left(c_1 \sin(2x) + c_2 \cos(2x) \right)$

$g'(x) = \alpha e^x (c_1 \sin(2x) + c_2 \cos(2x)) + \alpha e^x \left(2c_1 \cos(2x) - 2c_2 \sin(2x) \right)$

$= \alpha e^x \left[(c_1 - 2c_2) \sin(2x) + (2c_1 + c_2) \cos(2x) \right]$

$g''(x) = \alpha e^x \left[(c_1 - 2c_2) \sin(2x) + (2c_1 + c_2) \cos(2x) \right] + \alpha e^x \left[(2c_1 - 4c_2) \cos(2x) + (-4c_1 - 2c_2) \sin(2x) \right]$

$= \alpha e^x \left[(-3c_1 - 4c_2) \sin(2x) + (4c_1 - 3c_2) \cos(2x) \right]$

Substitions:

$\alpha e^x \left\{ \left[(-3c_1 - 4c_2) - 3(c_1 - 2c_2) - 4c_1 \right] \sin(2x) + \left[(4c_1 - 3c_2) - 3(2c_1 + c_2) - 4c_2 \right] \cos(2x) \right\} = -8 e^x \cos(2x)$

$\Rightarrow \alpha = -8$

$\begin{cases} -10c_1 + 2c_2 = 0 \\ -2c_1 - 10c_2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} c_2 = +5c_1 \\ -2c_1 - 50c_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2 = \frac{-5}{52} \\ c_1 = \frac{-1}{52} \end{cases}$

$g(x) = -8 e^x \left[\frac{-1}{52} \sin(2x) + \frac{-5}{52} \cos(2x) \right]$

$= \frac{+2}{13} e^x \left(\sin(2x) + 5 \cos(2x) \right)$

3.14 (page 70)

a) $y'' + y' - 2y = 2x$

éq. car. : $r^2 + r - 2 = 0 \Leftrightarrow (r+2)(r-1) = 0$

$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x}$

Sol. particulière

$g(x) = ax + b$, $g'(x) = a$, $g''(x) = 0$

$0 + a - 2ax - 2b = 2x \Rightarrow a = -1$ et $a - 2b = 0$

$$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x} - x - \frac{1}{2}$$

Avec les conditions initiales: $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$

$$y' = C_1 e^{x} - 2C_2 e^{-2x} - 1$$

$$\begin{cases} 0 = C_1 + C_2 - \frac{1}{2} \\ 1 = C_1 - 2C_2 - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = \frac{1}{2} \\ C_1 - 2C_2 = 2 \end{cases} \left| \begin{array}{l} C_1 \\ \cdot 1 \\ \cdot(-1) \end{array} \right. \begin{cases} 3C_2 = -\frac{3}{2} \\ C_1 = \frac{1}{2} - C_2 \end{cases}$$

$C_2 = \frac{-1}{2}$ et $C_1 = 1$

Finalement :

$$\boxed{y = e^{x} - \frac{1}{2} e^{-2x} - x - \frac{1}{2}}$$

3.14

b) $y'' - 2y' - 3y = 3x e^{2x}$

① eq. car: $r^2 - 2r - 3 = 0 \iff (r-3)(r+1) = 0$

$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}$

② sol. particulière, essayons

$g(x) = (ax+b) e^{2x}$

$g'(x) = a e^{2x} + 2(ax+b) e^{2x} = (2ax + a + 2b) e^{2x}$

$g''(x) = 2a e^{2x} + 2(2ax + a + 2b) e^{2x}$

$= (4ax + 4a + 4b) e^{2x}$

$4ax + 4a + 4b - 4ax - 2a - 4b - 3ax - 3b = 3x$

$-3ax + 2a - 3b = 3x$

$$\begin{cases} -3a = 3 \\ 2a - 3b = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = -1 \\ b = \frac{2}{3} a = \frac{-2}{3} \end{cases}$$

$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} + \left(-x - \frac{2}{3}\right) e^{2x}$

$y' = -C_1 e^{-x} + 3C_2 e^{3x} + \left(-2x - \frac{7}{3}\right) e^{2x}$

$$\begin{matrix} y(0) = 1 \Rightarrow \\ y'(0) = 0 \Rightarrow \end{matrix} \begin{cases} C_1 + C_2 - \frac{2}{3} = 1 \\ -C_1 + 3C_2 - \frac{7}{3} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} C_1 + C_2 = \frac{5}{3} \\ -C_1 + 3C_2 = \frac{7}{3} \end{cases} \begin{array}{|l} C_1 \\ \cdot 1 \\ \cdot 1 \end{array}$$

$$\begin{cases} 4C_2 = \frac{12}{3} \Rightarrow C_2 = 1 \\ C_1 = -1 + \frac{5}{3} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\underline{y = \frac{2}{3} e^{-x} + e^{3x} - x e^{2x} - \frac{2}{3} e^{2x}}$$

3.14

c) $y'' + 4y = 3\sin(2x)$

(1) éq. car. : $r^2 + 4 = 0 \Rightarrow r = \pm 2i$

$y = C_1 \sin(2x) + C_2 \cos(2x)$

sol. particulière :

$g(x) = a\sin(2x) + b\cos(2x)$ ne convient pas !

On choisit, comme sol. particulière $g(x) = ax\cos(2x)$ (CRM)

$g'(x) = a\cos(2x) - 2ax\sin(2x)$

$g''(x) = -2a\sin(2x) + 2a\sin(2x) - 4ax\cos(2x)$

$-4a\sin(2x) \underline{- 4ax\cos(2x)} + \underline{4ax\cos(2x)} = 3\sin(2x)$

d'où $-4a = 3 \Rightarrow a = \frac{-3}{4}$

On a : $y = C_1\sin(2x) + C_2\cos(2x) - \frac{3}{4}x\cos(2x)$

Avec les cond. initiales :

$y' = 2C_1\cos(2x) - 2C_2\sin(2x) - \frac{3}{4}\cos(2x) + \frac{3}{2}x\sin(2x)$

$y(0) = 2$: $C_2 = 2$

$y'(0) = -1$: $2C_1 - \frac{3}{4} = -1 \Rightarrow 2C_1 = -\frac{1}{4} \Rightarrow C_1 = -\frac{1}{8}$

$$\boxed{y = -\frac{1}{8}\sin(2x) + 2\cos(2x) - \frac{3}{4}x\cos(2x)}$$