22. Établir le développement en série des fonctions suivantes au voisinage de $a = 0$ et déterminer le rayon de convergence de ces séries.

a) $x \mapsto (1+x)^2$

$f(x) = (1+x)^2$, $f(0) = 1$

$f'(x) = 2(1+x)$, $f'(0) = 2$

$f''(x) = 2$, $f''(0) = 2$

$f^{(n)}(x) = 0$, $f^{(n)}(0) = 0$ pour $n \geqslant 3$

$f(x) = 1 + 2x + \frac{2}{2!}x^2 = 1 + 2x + x^2 = (1+x)^2$

Puisque le reste est nul, le rayon de convergence est $r = +\infty$

b) $x \mapsto \sqrt{x+1}$

$f(x) = \sqrt{x+1}$, $f(0) = 1$

$f'(x) = \frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}}$, $f'(0) = \frac{1}{2}$

$f''(x) = -\frac{1}{4}(x+1)^{-\frac{3}{2}}$, $f''(0) = -\frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{2}$

$f^{(3)}(x) = \frac{3}{8}(x+1)^{-\frac{5}{2}}$, $f^{(3)}(0) = \frac{3}{8} = \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{2} \cdot \frac{-3}{2}$

$f^{(4)}(x) = \frac{-15}{16}(x+1)^{-\frac{7}{2}}$, $f^{(4)}(0) = \frac{-15}{16} = \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{2} \cdot \frac{-3}{2} \cdot \frac{-5}{2}$

$$P_3(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2!} x^2 + \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{3!} x^3 - \frac{15}{16} \cdot \frac{1}{4!} x^4$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2^2 \cdot 2!} x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2^3 \cdot 3!} x^3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^4 \cdot 4!} x^4$$

On observe que $|a_k| = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots (2k-3)}{2^k \cdot k!}$, $k \geq 2$

On calcule r en utilisant le critère d'Alembert :

$$r = \lim_{k \to +\infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|} = \lim_{k \to +\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2k-3)}{2^k \cdot k!} \cdot \frac{2^{k+1} (k+1)!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2k-1)}$$

$$= \lim_{k \to +\infty} \frac{2(k+1)}{2k-1} = 1$$

Donc $\boxed{r = 1}$

e) $x \mapsto \ln(1-x)$

$\left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-u'}{u^2}$

$f(x) = \ln(1-x)$, $f(0) = 0$

$f'(x) = \frac{-1}{1-x}$, $f'(0) = -1$

$f''(x) = \frac{-1}{(1-x)^2}$, $f''(0) = -1$

$f^{(3)}(x) = \frac{-2}{(1-x)^3}$, $f^{(3)}(0) = -2$

$f^{(4)}(x) = \frac{-6}{(1-x)^4}$, $f^{(4)}(0) = -6$

$f^{(5)}(x) = \frac{-24}{(1-x)^5}$, $f^{(5)}(0) = -24$

Donc $f(x) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3!}\cdot 2x^3 - \frac{1}{4!}\cdot 6x^4 - \dots$

$= -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \dots$

$a_k = -\frac{1}{k}$, $k \geq 1$

$r = \lim_{k\to+\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \lim_{k\to+\infty} \frac{\frac{1}{k}}{\frac{1}{k+1}} = \lim_{k\to+\infty} \frac{k+1}{k} = 1$

$\Rightarrow \boxed{r=1}$

f) $x \mapsto e^{-x} \cdot \cos(x)$

$f(x) = e^{-x}\cdot\cos(x)$, $f(0) = 1$

$f'(x) = -e^{-x}\cos(x) - e^{-x}\cdot\sin(x)$

$= -e^{-x}(\cos(x) + \sin(x))$ $f'(0) = -1$

$f''(x) = e^{-x}(\cos(x)+\sin(x)) - e^{-x}(-\sin(x)+\cos(x))$

$= e^{-x}(2\sin(x)) = 2e^{-x}\cdot\sin(x)$ $f''(0) = 0$

$f^{(3)}(x) = 2(-e^{-x}\sin(x) + e^{-x}\cos(x)) = 2e^{-x}(-\sin(x)+\cos(x))$

$f^{(3)}(0) = 2$

$f^{(4)}(x) = 2(-e^{-x}(-\sin(x)+\cos(x)) + e^{-x}(-\cos(x)-\sin(x)))$

$$= 2e^{-x}\left(-2\cos(x)\right) = -4\,e^{-x}\cos(x) \qquad \underline{f^{(4)}(0) = -4}$$

$$f(x) = 1 - x + \frac{2}{3!}x^3 - \frac{4}{4!}x^4 + \frac{4}{5!}x^5 - \frac{8}{7!}x^7 + \frac{16}{8!}x^8 - \dots$$

$$= 1 - x + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{30}x^5 - \frac{1}{630}x^7 + \dots$$

Le rayon de convergence semble être $+\infty$.