23. En utilisant des développements en série déjà établis, déterminer les séries de Maclaurin des fonctions suivantes.

Les séries de MacLaurin sont des développement en série au voisinage de $x = 0$.

a) $f(x) = \ln\left(\frac{1}{1-x}\right) = -\ln(1-x)$

$$f'(x) = \frac{1}{1-x} \overset{|x|<1}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} x^k$$

En intégrant termes à termes, on a :

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k+1} x^{k+1}}$$

b) $f(x) = x e^x$

On sait que $e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} x^k$ au voisinage de $x = 0$.

Donc $f(x) = x e^x = \boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} x^{k+1}}$

d) $f(x) = \arctan(x)$

On sait que :

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} \overset{|x^2|<1}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} (-x^2)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^{2k}$$

En intégrant termes à termes, on a :

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}}$$

f) $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

$$f(x) = \ln(1+x) - \ln(1-x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} = \frac{1-x+1+x}{1-x^2} = \frac{2}{1-x^2}$$

$$\overset{|x^2|<1}{=} 2\sum_{k=0}^{+\infty} (x^2)^k = 2\sum_{k=0}^{+\infty} x^{2k}$$

En intégrant termes à termes, on a :

$$\boxed{f(x) = 2\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2k+1} x^{2k+1}}$$

h) $f(x) = e^{-x^2}$

$$e^{-x^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}(-x^2)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} x^{2k}$$