Equations différentielles – TE 835

Problème	1	2	3	Total
Points	10	10	12	32
Points obtenus				

Problème 1 (10 points)
Résoudre les deux équations différentielles suivantes.

a) $x\,y' - k\,y = 0$, avec $k \in \mathbb{R}^\star$

b) $y^2 + (x+1)\,y' = 0$, avec $y(0) = \frac{1}{10}$

a) $xy' = Ky$

$\frac{y'}{y} = \frac{K}{x} \Rightarrow \ln|y| = K \cdot \ln|x| + C$

$\ln|y| = \ln|x^K| + C$

$y = C x^K$

b) $y^2 = -(x+1)\,y'$

$\frac{y'}{y^2} = \frac{-1}{x+1} \Rightarrow y' y^{-2} = \frac{-1}{x+1}$

$-y^{-1} = -\ln|x+1| + C$

$\Rightarrow \frac{1}{y} = \ln|x+1| + C \Rightarrow y = \frac{1}{\ln|x+1| + C}$

$y(0) = \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{1}{C} = \frac{1}{10} \Rightarrow C = 10$

$y = \frac{1}{\ln|x+1| + 10}$

Problème 2 (10 points)

Beaulieu 2022

Résoudre l'équation différentielle suivante sachant que $y(0) = 0$ et $y\,(1) = e^{-3}$.

$$y'' - 6\,y' + 9\,y = (8\,x - 4)\,e^{x}$$

1) Equation caractéristique: $r^2 - 6r + 9 = 0$

$$(r-3)^2 = 0$$

Solution de l'équation homogène: $y_H = (C_1 x + C_2)\,e^{3x}$

2) Solution particulière:

$$y_p = (Ax + B)\,e^{x}$$

$$y_p' = Ae^{x} + (Ax+B)\,e^{x} = (Ax + A + B)\,e^{x}$$

$$y_p'' = Ae^{x} + (Ax + A + B)\,e^{x} = (Ax + 2A + B)\,e^{x}$$

Dans l'éq. diff:

$$(Ax+2A+B)\cancel{e^{x}} - 6(Ax + A + B)\cancel{e^{x}} + 9(Ax+B)\cancel{e^{x}} = (8x-4)\cancel{e^{x}}$$

$$\begin{cases} Ax - 6Ax + 9Ax = 8x \\ 2A + B - 6A - 6B + 9B = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4Ax = 8x \\ -4A + 4B = -4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = 2 \\ 4B = 4A - 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = 1 \end{cases} \Rightarrow y_p = (2x+1)\,e^{x}$$

$$y = (C_1 x + C_2)\,e^{3x} + (2x+1)\,e^{x}$$

3) Avec les conditions initiales :

$y(0) = 0 \Rightarrow C_2 + 1 = 0 \Rightarrow C_2 = -1$

$y(1) = -e^{-3} \Rightarrow (C_1 + C_2)e^3 + 3e = -e^{-3}$

$\Rightarrow (C_1 - 1)e^3 + 3e = -e^{-3} \quad \Big| \cdot e^{-3}$

$C_1 - 1 = -e^{-6} - 3e^{-2}$

$C_1 = 1 - \frac{1}{e^6} - \frac{3}{e^2}$

$$y(x) = \left(\left(1 - \frac{1}{e^6} - \frac{3}{e^2}\right)x - 1\right)e^{3x} + (2x+1)e^x$$

Problème 3 (12 points)

Bugnon 2024

D'après la loi de Newton, la vitesse de refroidissement d'un corps quelconque dans l'air est proportionnelle à la différence entre la température du corps et celle de l'air environnant (on part du principe que la température du corps est plus élevée que celle de l'air au départ et que la température de l'air est constante).

Soit k le coefficient de proportionnalité en question. La température de l'air est de 25°C.

a) En utilisant $y(t)$ pour la température du corps au temps t avec $k > 0$, écrire l'équation différentielle pour la loi de Newton.

b) Résoudre cette équation différentielle et donner la solution générale.

c) Donner la solution particulière de cette équation différentielle avec la condition initiale y_0, température du corps au temps $t = 0$.

d) Calculer la valeur du paramètre k sachant que le corps refroidit de 125°C à 50°C en 30 minutes.

a) $y' = -k(y-25)$ 2

b) $y' + ky = 25k$

b1) Solution de l'équation homogène :

$$\frac{y'}{y} = -k \Rightarrow \ln|y| = -kt + b \Rightarrow y = Ae^{-kt}$$

b2) Avec le facteur intégrant $e^{\int k\,dt} = e^{kt}$

$$y'e^{kt} + k \cdot e^{kt} y = 25ke^{kt}$$

$$(ye^{kt})' = (25e^{kt})'$$

$$y = 25$$

Finalement $y = Ae^{-kt} + 25$ 5

c) $y(0) = y_0 = A + 25 \Rightarrow A = y_0 - 25$

$$y = (y_0 - 25)\, e^{-kt} + 25$$ 2

d) $$50 = (125 - 25)\, e^{-kt} + 25$$

$$25 = 100\, e^{-30k} \Rightarrow \frac{1}{4} = e^{-30k}$$

$$\Rightarrow k = -\frac{\ln\left(\frac{1}{4}\right)}{30} = -\frac{-\ln(4)}{30} = \frac{\ln(2^2)}{30} = \frac{2\ln(2)}{30}$$

$$= \frac{\ln(2)}{15}$$ 3