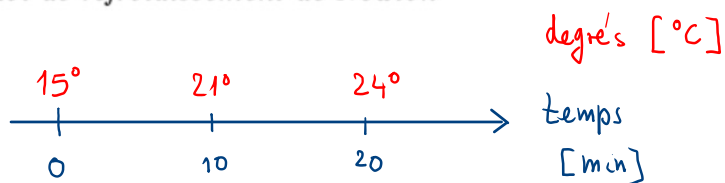


2.14. La loi de refroidissement de Newton dit que lorsqu'un objet à la température T est placé dans un milieu dont la température constante est m , alors T varie à un taux proportionnel à la différence de température entre T et m . Un thermomètre indique une température de 15°C . On le place à l'extérieur. Dix minutes plus tard, il indique 21°C et encore dix minutes plus tard, il marque 24°C . Utiliser la loi de refroidissement de Newton pour calculer la température extérieure.

loi de refroidissement de Newton

11.04.25



$$T' = K(T - m)$$

$$T'(t) = K(T(t) - m)$$

Réolvons cette équation différentielle linéaire d'ordre 1 à facteur constant.

$$T' = KT - Km$$

$$T' - KT = -Km$$

$$T = y$$

$$t = x$$

① Equation homogène : $T' = KT$

$$\frac{T'}{T} = K \Rightarrow \ln(T) = Kt + C$$

$$T = be^{Kt}$$

② Solution particulière : le facteur intégrant $e^{\int -K dt} = -e^{-Kt}$

$$T' \cdot (-e^{-Kt}) - K \cdot (-e^{-Kt}) \cdot T = -Km (-e^{-Kt})$$

$$(-e^{-Kt} \cdot T)' = Km e^{-Kt}$$

$$-e^{-Kt} T = -m e^{-Kt}$$

$$T = m$$

③ Solution générale : $T = be^{Kt} + m$

Déterminons m .

Les conditions nous donnent :

$$\text{en } 0 : \quad b + m = 15$$

$$\text{en } 10 : \quad b e^{10K} + m = 21$$

$$\text{en } 20 : \quad b e^{20K} + m = 24$$

Posons $e^{10K} = \alpha$. On a le système :

$$\begin{cases} b + m = 15 \\ b\alpha + m = 21 \\ b\alpha^2 + m = 24 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} m = 15 - b \\ b\alpha - b = 6 \\ b\alpha^2 - b = 9 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} m = 15 - b \\ b(\alpha - 1) = 6 \\ b(\alpha^2 - 1) = 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 15 - b \\ \alpha - 1 = \frac{6}{b} \\ b(\alpha - 1)(\alpha + 1) = 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 15 - b \\ \alpha - 1 = \frac{6}{b} \\ \cancel{b} \cdot \frac{6}{\cancel{b}} (\alpha + 1) = 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 15 - b \\ \alpha - 1 = \frac{6}{b} \\ \alpha = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{On trouve : } K = \frac{\ln(\frac{1}{2})}{10} = - \frac{\ln(2)}{10}$$

$$\begin{cases} b + m = 15 \\ b e^{-\ln(2)} + m = 21 \\ b e^{-\ln(2) \cdot 2} + m = 24 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} b + m = 15 \\ \frac{b}{2} + m = 21 \\ \frac{b}{4} + m = 24 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{m = 27}$$