

2.3. Résoudre chacune des équations différentielles suivantes :

$$f) \quad y' + y = 5 \sin(2x)$$

$$1^{\circ}) \quad y' + y = 0$$

$$y' = -y$$

$$\frac{y'}{y} = -1$$

$$\ln(y) = -x + c$$

$$y = \underbrace{e^{-x+c}}$$

$$\Rightarrow \boxed{y = Ke^{-x}}$$

$$e^{-x} \cdot \underbrace{e^c}_K$$

$$2^{\circ}) \text{ Solution particulière} \quad y = a \sin(2x) + b \cos(2x)$$

$$y' = 2a \cos(2x) - 2b \sin(2x)$$

$$\underline{(a-2b)} \sin(2x) + (2a+b) \cos(2x) = \underline{5} \sin(2x)$$

$$\text{d'où le système} \quad \begin{cases} a-2b = 5 \\ 2a+b = 0 \end{cases} \begin{array}{l} \cdot 2 \\ \cdot (-1) \end{array} \begin{array}{l} | \cdot 1 \\ | \cdot 2 \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} -5b = 10 \\ 5a = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \end{cases}$$

$$\text{d'où la sol. particulière:} \quad y = \sin(2x) - 2 \cos(2x)$$

$$\text{Sol de l'éq. diff.} \quad \underline{y = Ke^{-x} + \sin(2x) - 2 \cos(2x)}$$

2.3	e)
2.4	
2.6	
2.7	
2.9	

$$e) \frac{dy}{dx} + 2xy = 4x$$

$$y' + 2xy = 4x$$

1°) Solution de l'équation homogène :

$$y = c e^{-\int 2x dx}$$
$$y = c e^{-x^2}$$

2°) Solution particulière :

facteur intégrant : $e^{\int 2x dx} = e^{x^2}$

$$e^{x^2} y' + 2x e^{x^2} y = e^{x^2} \cdot 4x$$

$$\underbrace{(e^{x^2} y)'} = (2e^{x^2})'$$

$$y = 2$$

$$\int 4x e^{x^2} dx = ?$$

Sol. générale $y = c e^{-x^2} + 2$

2.4. Résoudre chacun des problèmes aux valeurs initiales :

a) $y' - y = 2xe^{2x}$ $y(0) = 1$

b) $y' + \frac{2}{x}y = \frac{\cos(x)}{x^2}$ $y(\pi) = 0$ $x > 0$

2) 1°) Solution de l'équation homogène

$$y = c e^{-\int -dx} = c e^x$$

Proposition 2.1. L'équation sans second membre (2.12) : $y' + a(x)y = 0$ admet la solution générale

$$y = ce^{-\int a(x)dx} \quad (2.13)$$

où c est une constante réelle arbitraire.

2°) Solution particulière

$$y = (ax^2 + bx + c)e^{2x}$$

$$y' = (2ax + b)e^{2x} + (ax^2 + bx + c) \cdot 2e^{2x}$$

$$= e^{2x} [2ax^2 + (2a + 2b)x + b + 2c]$$

$$(ax^2 + bx + c)e^{2x} - e^{2x} [2ax^2 + (2a + 2b)x + (b + 2c)] = 2xe^{2x}$$

$$[-ax^2 + (-2a - b)x + (-b - c)] = 2x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -2 \\ c = 2 \end{cases}$$

$$\underline{y = (-2x + 2)e^{2x}}$$

⚠ j'ai calculé $y - y'$ 😞

Sol générale : $y = ce^x + (2x - 2)e^{2x}$

$$y(0) = 1 \Rightarrow c - 2 = 1 \Rightarrow c = 3$$

$$\Rightarrow y = 3e^x + 2(x - 1)e^{2x}$$