21.03.25

2.6. En chimie, on utilise la notation $A+B \to Y$ pour signifier qu'une substance Y est produite par interaction des substances A et B. Soit a et b les quantités initiales respectives de A et de B. Si au temps t, la quantité de Y est $y=f(t)$, les quantités de A et de B sont respectivement $a-f(t)$ et $b-f(t)$. Si la vitesse de production de Y est $\frac{dy}{dt}=k(a-y)(b-y)$ pour une certaine constante positive k et si $f(0)=0$, calculer $f(t)$.

CRM pg 82

$\dfrac{1}{(x-a)(x-b)}$	$\dfrac{1}{a-b}\ln\left\|\dfrac{x-a}{x-b}\right\|$

$$y' = K(a-y)(b-y)$$

$$\frac{y'}{(a-y)(b-y)} = K$$

$$\boxed{\begin{aligned}(a-y) &= -(y-a)\\ (b-y) &= -(y-b)\end{aligned}}$$

$$\frac{y'}{(y-a)(y-b)} = K \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{a-b}\ln\left|\frac{y-a}{y-b}\right| = Kt + c$$

$$\ln\left|\frac{y-a}{y-b}\right| = (a-b)(Kt+c)$$

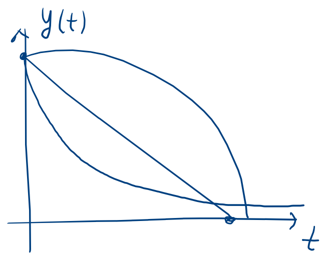
$$\frac{y-a}{y-b} = e^{(a-b)(Kt+c)}$$

$$y-a = (y-b)\,e^{(a-b)(Kt+c)}$$

$$y\left(1-e^{(a-b)(Kt+c)}\right) = a - be^{(a-b)(Kt+c)}$$

$$y = \frac{a-be^{(a-b)(Kt+c)}}{1-e^{(a-b)(Kt+c)}}$$

2.11. La plupart des produits pharmaceutiques (comme la pénicilline), s'éliminent du sang à une vitesse proportionnelle à la quantité y rémanente dans le sang.



a) Montrer que $y = y_0 e^{-kt}$ pour un certain $k > 0$ si y_0 est la quantité en milligrammes injectée.

b) Si le produit est injecté à raison de I mg/min,alors $y' = -ky + I$. Chercher une expression de y en fonction de t sachant qu'en $t = 0$ on a $y = 0$ et calculer $L = \lim_{t\to\infty} y$.

c) Si la demi-vie du produit est de 2 heures, quel est le taux d'injection qui maintiendra à long terme la présence de 100 mg du produit dans le sang.

a) Soit $y(t)$ la quantité du produit restant dans le sang

$$y' = -Ky \quad , \quad K > 0$$

$$\frac{y'}{y} = -K$$

$$\ln|y| = -Kt + c$$

$$|y| = e^{-Kt + c}$$

$$y = \underbrace{e^c}_{y_0} e^{-Kt}$$

$$y = y_0 e^{-Kt} \quad , \quad K > 0 \quad \text{et} \quad y_0 = y(0)$$

b) $y' = -Ky + I$

Le solution de l'équation homogène : $y = y_0 e^{-Kt}$ (vue avec a))

Trouvons une solution particulière :

$$y' + Ky = I \qquad \text{facteur intégrant : } e^{\int K dt} = e^{Kt} \qquad \boxed{e^{\int a(x) dx}}$$

$$\underbrace{y' e^{Kt} + Ky e^{Kt}}_{(y e^{Kt})'} = I e^{Kt}$$

$$(y e^{Kt})' = I e^{Kt}$$

$$y e^{Kt} = \frac{I}{K} e^{Kt} + c$$

$$y = \frac{I}{K} + c e^{-Kt}$$

Avec $y(0) = 0$: $\frac{I}{K} + c = 0 \Rightarrow c = -\frac{I}{K}$

$$\boxed{y = \frac{I}{K}\left(1 - e^{-Kt}\right)}$$

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{I}{K}\left(1 - e^{-Kt}\right) = \frac{I}{K} \cdot \lim_{t\to+\infty}\left(1 - \underbrace{e^{-Kt}}_{\to 0}\right)$$

$$= \frac{I}{K}$$

$t \to \infty$

c) Si la demi-vie du produit est de 2 heures, quel est le taux d'injection qui maintiendra à long terme la présence de 100 mg du produit dans le sang.

demi-vie : après 2 heures, il reste la moitié de la substance

A partir de $y = y_0 e^{-kt}$, on a

$$e^{-120k} = \frac{1}{2} \qquad [\text{demi-vie}]$$

$$\begin{cases} e^{x} = a \\ \ln(e^{x}) = \ln(a) \end{cases}$$
$$x = \ln(a)$$

$$-120k = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

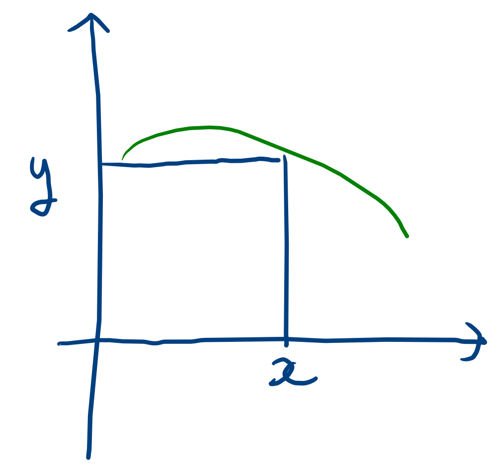
$$-120k = -\ln(2)$$

$$k = \frac{\ln(2)}{120}$$

Comme $\frac{I}{k} = 100 \Rightarrow I = 100k = \frac{100}{120}\ln(2) = \frac{5}{6}\ln(2)$

2.8. Trouver les équations des courbes dont la pente en chaque point est proportionnelle à l'abscisse de ce point.

$y(x)$ est l'équation de la courbe



$$y' = Kx$$

$$y = Kx^2 + C$$

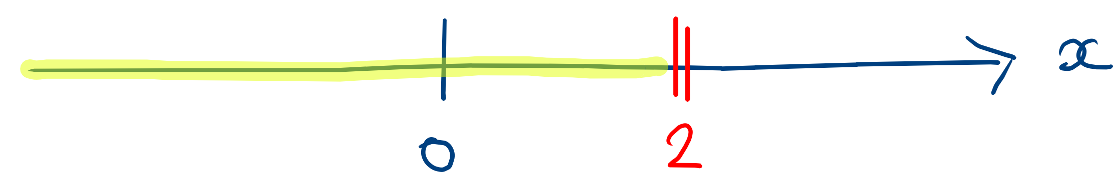
Famille de paraboles

3.1. Trouver le plus grand intervalle I contenant 0 où le problème aux valeurs initiales

$$(x-2)y'' + 3y = x \qquad y(0) = 0 \qquad y'(0) = 1$$

ait une solution unique.

$$y'' + \frac{3}{x-2}\,y = \frac{x}{x-2}$$



$y(0) = 0$

$y'(0) = 1$

$$I = \,]-\infty, 2[$$

Selon le théorème 3.1, $a_1(x)$, $a_0(x)$ et $g(x)$ doivent être des fonctions continues sur I.

Comme $x_0 = 0$ doit être dans cet intervalle, il n'y a pas d'autre choix que de prendre $I = \,]-\infty\,; 2[$

3.2. Sachant que $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$ est la solution générale de l'équation $y'' - y = 0$ sur $\mathbb{R}$, déterminer la solution qui vérifie les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.

$y'' - y = 0$ sur $\mathbb{R}$

$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1,$

Solution $\quad y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} \qquad y' = C_1 e^x - C_2 e^{-x}$

$$\left.\begin{array}{l} 0 = C_1 + C_2 \\ 1 = C_1 - C_2 \end{array}\right\} \quad 1 = 2C_1 \quad C_1 = 1/2, \quad C_2 = -1/2$$

3.3. Résoudre le problème aux valeurs initiales

$$y'' = \sin(x) \qquad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \qquad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2.$$

- $y'' = \sin(x)$
- $y' = -\cos(x) + a$ $\quad : y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2 \Rightarrow 0 + a = -2 \Rightarrow \boxed{a = -2}$
- $y = -\sin(x) + ax + b$

$y = -\sin(x) - 2x + b \quad : y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow -1 - \pi + b = 0 \Rightarrow \boxed{b = \pi + 1}$

$$\boxed{y = -\sin(x) - 2x + 1 + \pi}$$