MATHÉMATIQUES I

École de maturité

Niveau renforcé

GYMNASE DE BURIER

Table des matières

Juillet 2025

Chapitre 1

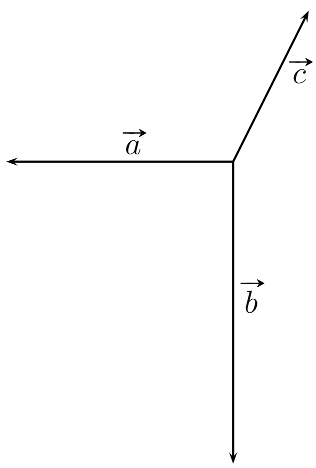
Géométrie vectorielle

1.1 Propriétés des vecteurs dans le plan et l'espace

1.1.1 Représenter un hexagone régulier $ABCDEF$ de centre O. Donner le nombre de vecteurs différents que l'on peut définir à l'aide des lettres de cette figure, ainsi qu'un représentant de chaque vecteur.

1.1.2

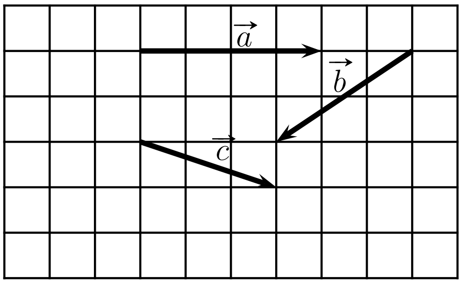
Construire la somme des trois vecteurs ci-dessous :



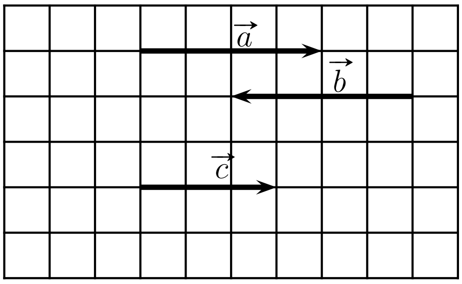
Tracer trois vecteurs non nuls et n'ayant pas la même direction mais dont la somme soit le vecteur nul.

1.1.3 Dans chaque cas, construire le vecteur demandé.

Cas 1



Cas 2

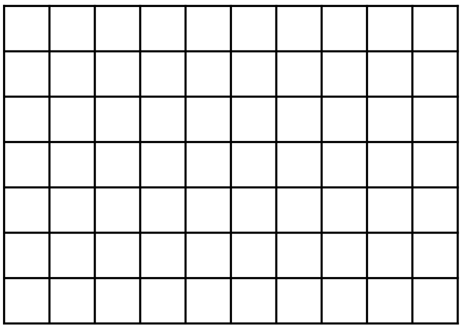


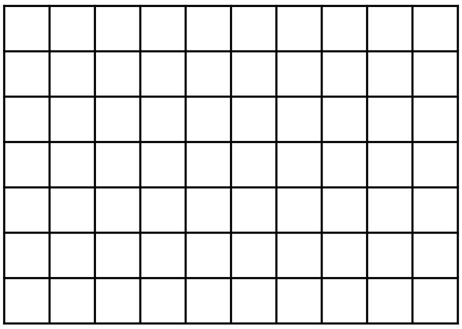
Le vecteur $\vec{a} + \vec{c} + \vec{b}$

Le vecteur $\vec{b} - \vec{c} + \vec{a}$

Le vecteur $\vec{a} - \left(\vec{c} + \vec{b}\right)$

Le vecteur $\vec{x}$ tel que $\vec{x} + \vec{a} = \vec{b}$





1.1.4 Soit A, B, C, D et E des points quelconques. Sans utiliser de dessin, simplifier le plus possible les expressions suivantes :

a) $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$

b) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{EB}$

c) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{AB}$

d) $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{BC}$

e) $\overrightarrow{EC} - \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{DB}$

1.1.5 On considère le parallélépipède $ABCD\ EFGH$ représenté ci-dessous. Simplifier au maximum les expressions vectorielles suivantes :

a) $\vec{a} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FG}$

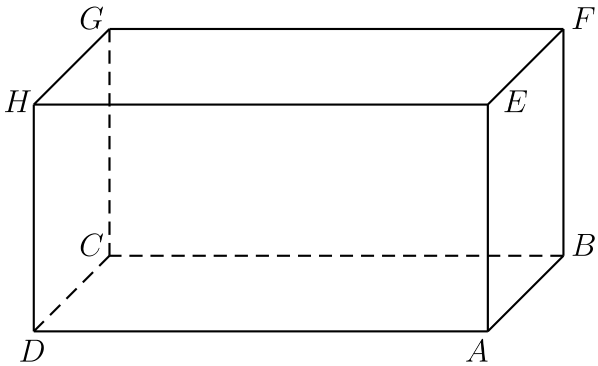
b) $\vec{b} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{CD}$

c) $\vec{c} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{CA}$

d) $\vec{d} = \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{GA}$

e) $\vec{e} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{EB}$

f) $\vec{f} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CC} + \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{GF}$



1.1.6 Soit $ABCDEF$ un hexagone régulier de centre O. Exprimer plus simplement les vecteurs qui suivent. Utiliser le point O lorsque c'est nécessaire.

a) $\vec{a} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$

b) $\vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FE}$

c) $\vec{c} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{FE}$

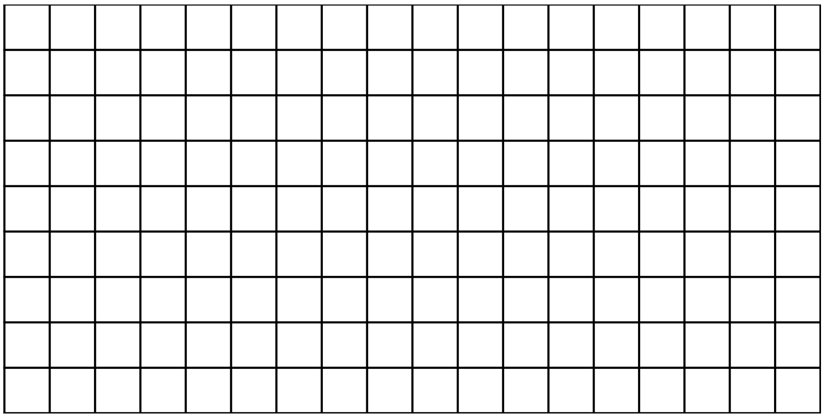
d) $\vec{d} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{DE}$

e) $\vec{e} = \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{FE}$

f) $\vec{f} = \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DD}$

1.1.7 Reprendre les vecteurs de l'exercice 1.1.3 et représenter dans les deux cas le vecteur

$$3\,\vec{a} + 2\,\vec{b} - 3/2\,\vec{c}$$



1.1.8 Représenter trois points A, B et P pour lesquels :

a) $\overrightarrow{AP} = 3\overrightarrow{AB}$

b) $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$

c) $\overrightarrow{PA} = \frac{-3}{2}\overrightarrow{BP}$

d) $\overrightarrow{PA} = \frac{-3}{5}\overrightarrow{BP}$

e) $\overrightarrow{PA} = \frac{3}{7}\overrightarrow{AB}$

f) $\overrightarrow{AP} = \frac{5}{-4}\overrightarrow{PB}$

g) $\overrightarrow{PA} = -2\overrightarrow{PB}$

1.1.9 Exprimer $\vec{v}$ en fonction de $\vec{a}$ et $\vec{b}$ si

$$3\,(\vec{a} - 2\vec{v}) - 6\,\vec{b} = -7\left(\frac{15}{7}\vec{v} - 3\,\vec{b}\right) + 12\vec{a}.$$

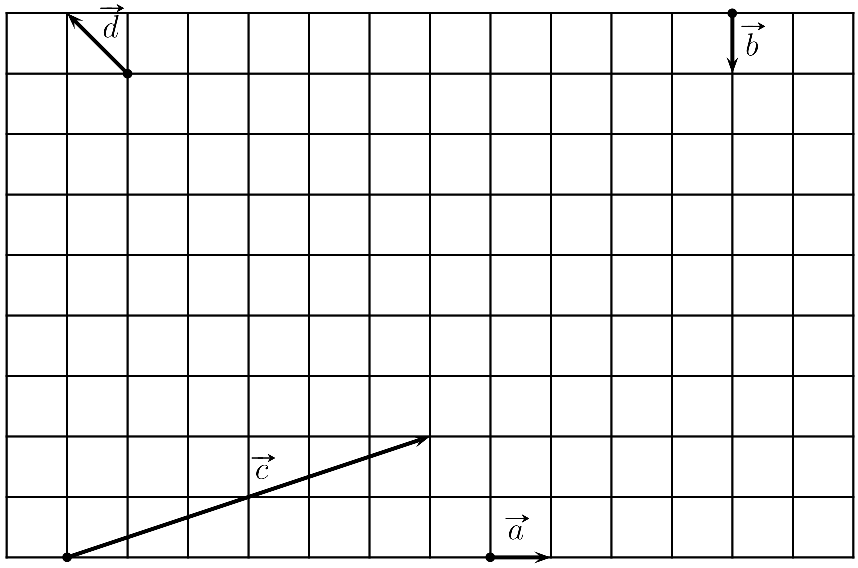
1.1.10 Soit ABC un triangle quelconque. Notons P le milieu de AB et Q celui de AC. Faire une figure d'étude. Le théorème du segment moyen affirme que le segment PQ est parallèle au côté BC et que sa longueur est la moitié de celle de BC.
Exprimer ce résultat à l'aide de vecteurs.

1.1.11 Par rapport aux vecteurs de la figure :

a) Exprimer $\vec{c}$ comme combinaison linéaire de $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

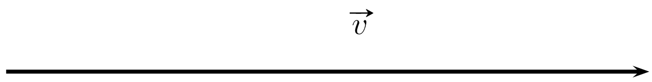
b) Exprimer $\vec{d}$ comme combinaison linéaire de $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

c) Exprimer $\vec{x} = -\frac{1}{2}\vec{c} - 5\vec{d}$ comme combinaison linéaire de $\vec{a}$ et $\vec{b}$.



1.1.12 Soit $\vec{v}$ le vecteur donné. Construire à la règle (non graduée) et au compas les vecteurs :

$$\vec{a} = \frac{1}{2}\vec{v} \quad \vec{b} = -3\vec{v} \quad \vec{c} = \frac{-3}{5}\vec{v} \quad \vec{d} = \sqrt{2}\vec{v} \quad \vec{e} = \sqrt{3}\vec{v}$$



1.1.13 Soit $ABCD\ EFGH$ un cube pour lequel on pose $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ et $\vec{c} = \overrightarrow{AE}$. Soit M le milieu du côté FG, N celui de HG et P le centre de la face $ABCD$. Faire une figure d'étude puis exprimer les vecteurs suivants comme combinaison linéaire de $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$: $\overrightarrow{EP}$, $\overrightarrow{EM}$, $\overrightarrow{EN}$, $\overrightarrow{NM}$, $\overrightarrow{PN}$, $\overrightarrow{NP}$, et $\overrightarrow{PM}$.

1.1.14 Soit $ABCD$ un parallélogramme pour lequel on pose $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$. Soit M le milieu de BC et P le point tel que $\overrightarrow{PA} = -2\overrightarrow{PC}$. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{PM}$ et $\overrightarrow{DM}$ comme combinaison linéaire de $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

1.1.15 Soit $ABCD$ un tétraèdre de l'espace[1], I le milieu de AC et J celui de BD. Prouver que :

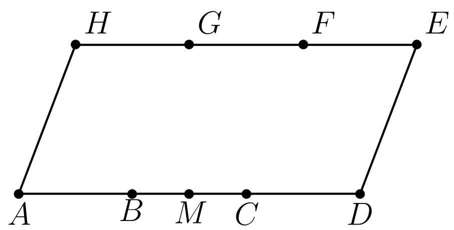
a) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{IJ}$ b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$

1.1.16 Démontrer que l'égalité suivante est toujours vraie : $\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{CA} - 5\overrightarrow{CB} + 3\overrightarrow{AB}$.

1.1.17 Représenter un carré $OABC$ puis construire les points E, F, G et H tels que :

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}, \quad \overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{OC}, \quad \overrightarrow{CG} = 2\overrightarrow{CB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BO} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OH} = -\sqrt{2}\,\overrightarrow{OB}.$$

1.1.18 Sur le parallélograme de la figure, les points G et F divisent le segment HE en trois parties égales, les points B et C divisent le segment AD en trois parties égales et M est le milieu de BC.
Donner un représentant de chaque vecteur colinéaire à $\overrightarrow{HG}$

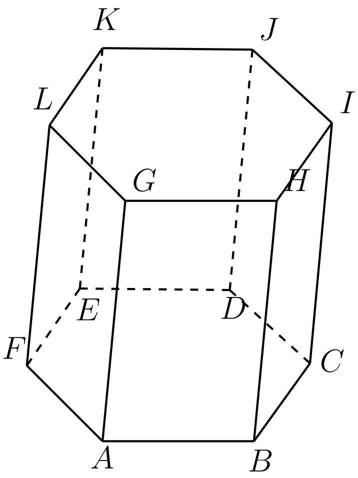


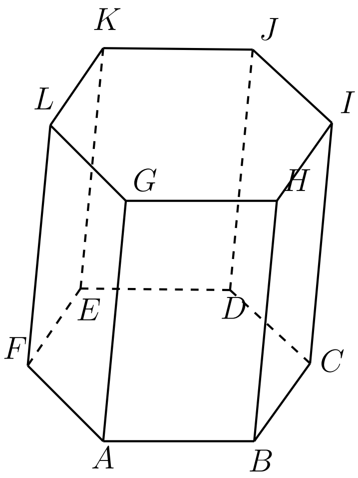
1. une pyramide à base triangulaire.

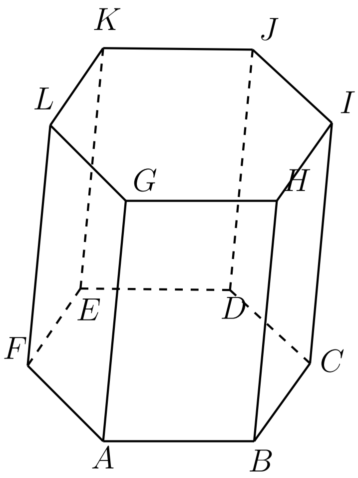
1.2 Repères, bases et combinaisons linéaires

1.2.1 On considère un prisme $ABCDEF\ GHIJKL$ dont les bases sont des hexagones réguliers. Dans chacun des cas suivants, déterminer si les trois vecteurs donnés sont coplanaires. Le cas échéant, exprimer l'un d'eux comme combinaisons linéaires des deux autres.

a) $\overrightarrow{AJ}$, $\overrightarrow{EK}$, $\overrightarrow{BC}$ b) $\overrightarrow{LG}$, $\overrightarrow{ID}$, $\overrightarrow{KB}$ c) $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{JD}$, $\overrightarrow{HI}$

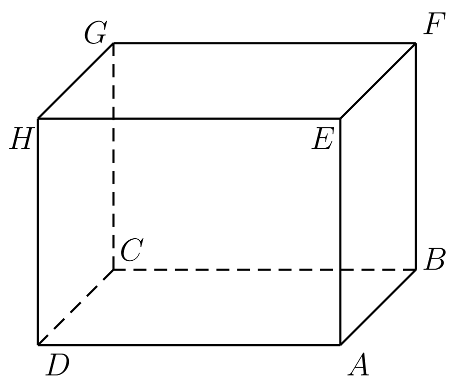




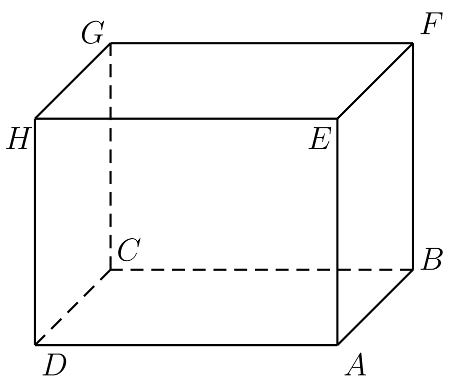


1.2.2 Soit une pyramide de sommet S dont la base $ABCD$ est un parallélogramme. On pose $\vec{u} = \overrightarrow{SA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{SB}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{SC}$. Réaliser une bonne figure d'étude. Exprimer chacun des vecteurs suivants comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$: $\overrightarrow{SD}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AD}$.

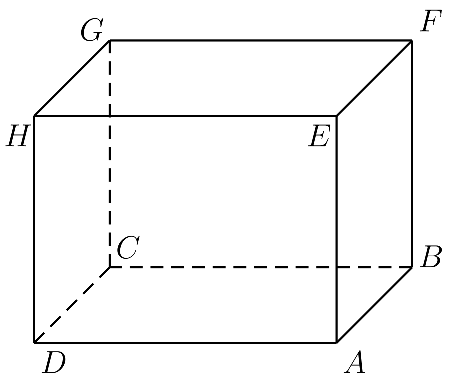
1.2.3 On considère le parallélépipède $ABCD\ EFGH$ représenté sur la figure. Dans chacun des cas suivants, déterminer si les trois vecteurs donnés sont coplanaires. Si tel est le cas, exprimer chacun des trois vecteurs comme combinaison linéaire des deux autres.



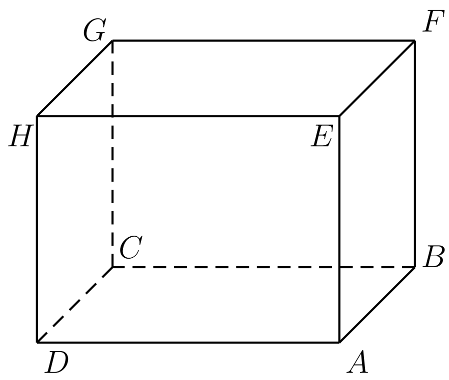
a) $\overrightarrow{GH}$, $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{DG}$



b) $\overrightarrow{GF}$, $\overrightarrow{EB}$ et $\overrightarrow{CD}$

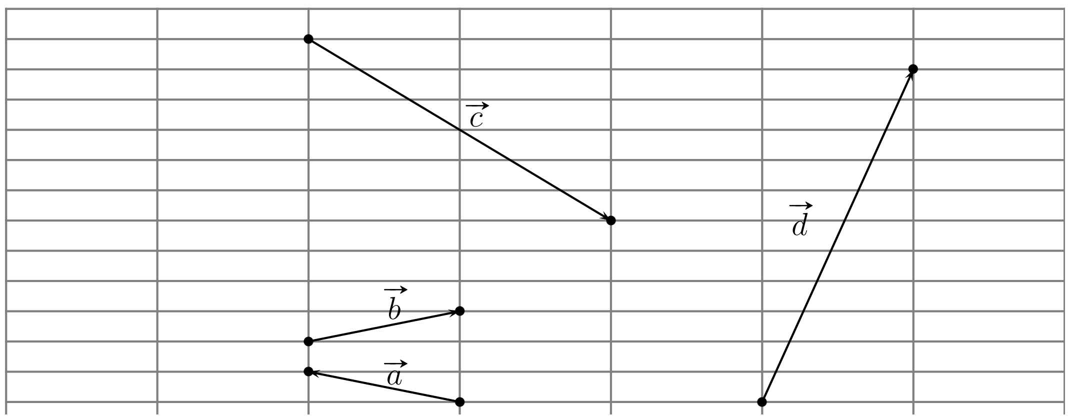


c) $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{AB}$

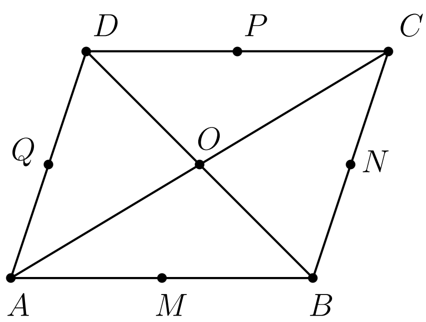


d) $\overrightarrow{DF}$, $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{GH}$

1.2.4 Exprimer les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ comme combinaison linéaire de $\vec{c}$ et $\vec{d}$ si :



1.2.5 Les points M, N, P et Q sont les milieux des côtés du parallélogramme $ABCD$.

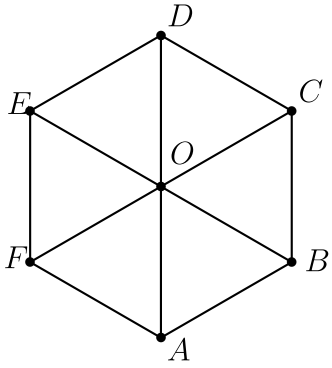


a) Donner, dans la base $\mathfrak{B}_1 = \left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}\right)$, les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AQ}$, $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{AP}$,$\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{QP}$ et $\overrightarrow{CM}$

b) Mêmes questions, mais relativement à la base $\mathfrak{B}_2 = \left(\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AM}\right)$

1.2.6 Soit $ABCDEF$ un hexagone régulier de centre O. Donner les composantes des vecteurs

$$\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{CB},\ \overrightarrow{FA},\ \overrightarrow{EA},\ \overrightarrow{EC},\ \overrightarrow{DB},\ \overrightarrow{EB},\ \overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{OC},\ \overrightarrow{OD},\ \overrightarrow{OE}$$



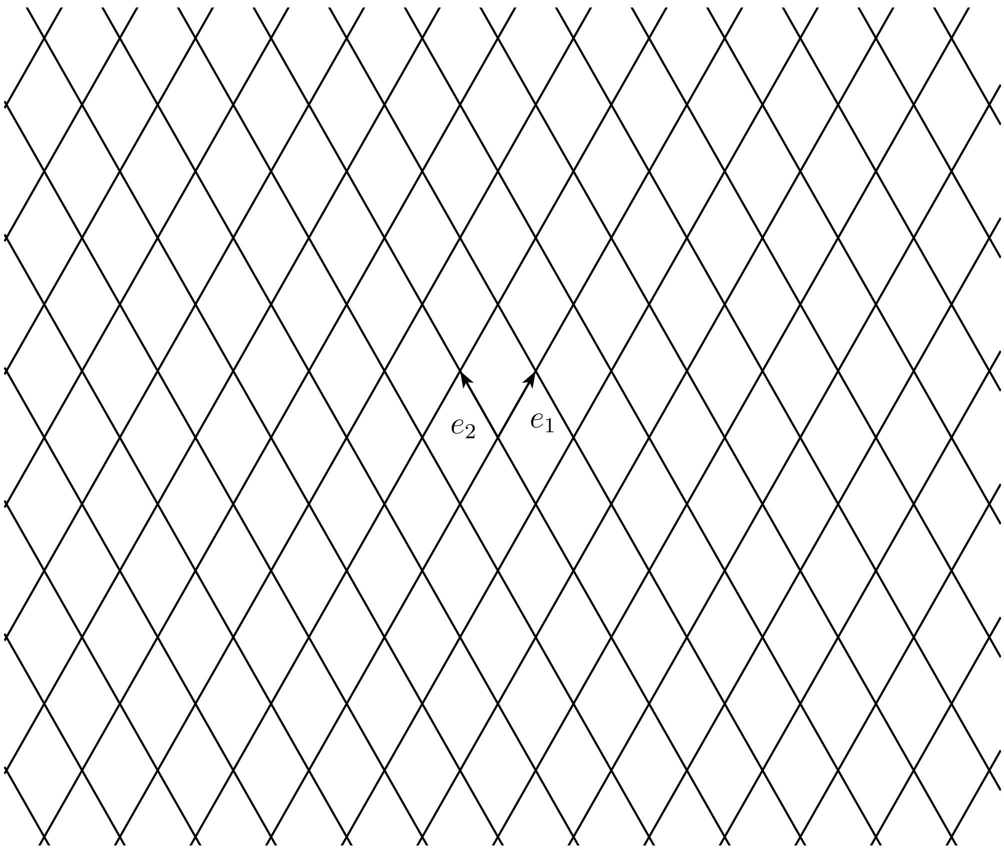
a) dans la base $\mathfrak{B}_1 = \left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)$

b) dans la base $\mathfrak{B}_2 = \left(\overrightarrow{EF};\overrightarrow{ED}\right)$

c) dans la base $\mathfrak{B}_3 = \left(\overrightarrow{EA};\overrightarrow{EC}\right)$

d) dans la base $\mathfrak{B}_4 = \left(\overrightarrow{OE};\overrightarrow{AB}\right)$

1.2.7 On considère la figure suivante



a) Représenter les vecteurs suivants, dont les composantes sont données relativement à la base $\mathfrak{B} = (\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{e_2})$:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \vec{f} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 9/4 \end{pmatrix}$$

b) Représenter les vecteurs $\vec{b} + \vec{c}$ et $3\,\vec{b} + 2\,\vec{c}$ et donner leurs composantes dans $\mathfrak{B}$.

1.2.8 Relativement à une base $\mathfrak{B}$ de V_2, on donne les vecteurs

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Calculer les composantes des vecteurs suivants :

a) $3\vec{a} - 4\vec{b} + \vec{c}$

b) $\vec{a} - 2\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$

c) $-5\vec{a} - 3\vec{b} - 8\vec{c}$

1.2.9 Relativement à une base $\mathfrak{B}$ de V_2, on donne les vecteurs

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Calculer les nombres k et m tels que $k\vec{a} + m\vec{b} = \vec{c}$.

1.2.10 Soit

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1.8 \\ -0.5 \end{pmatrix}$$

Calculer les composantes du vecteur $\vec{x}$ si

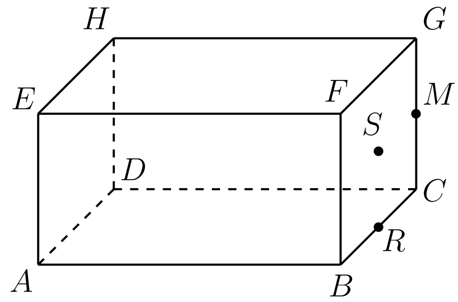
$$\frac{3\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}}{4} - \frac{3\vec{a}}{8} = 0.9\left(\frac{\vec{x}}{12} + \frac{5}{3}\vec{b}\right) - 2\vec{a}.$$

1.2.11 Soit $\mathfrak{B} = (\vec{e_1};\ \vec{e_2})$ une base de V_2 et $\mathfrak{B}' = \left(\vec{a};\vec{b}\right)$ une autre base de V_2. On donne les composantes de $\vec{a}$ et $\vec{b}$ relativement à la base $\mathfrak{B}$: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

a) Donner les composantes de $\vec{e_1}$ et $\vec{e_2}$ dans la base $\mathfrak{B}$.

b) Donner les composantes de $\vec{e_1}$ et $\vec{e_2}$ dans la base $\mathfrak{B}'$.

1.2.12 On considère un parallélépipède $ABCDEFGH$ de centre K. Les points M et R sont les milieux respectifs des arêtes $[CG]$ et $[BC]$ et S est le centre de la face $BCGF$.



a) Donner, relativement à la base $\mathfrak{B}_1 = \left(\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AD};\ \overrightarrow{AE}\right)$ les composantes des vecteurs

$$\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AE},\ \overrightarrow{AF},\ \overrightarrow{AG},\ \overrightarrow{AH},\ \overrightarrow{AM},\ \overrightarrow{AS},\ \overrightarrow{AR},\ \overrightarrow{AK}.$$

b) Mêmes questions relativement à la base $\mathfrak{B}_2 = \left(\overrightarrow{CM};\ \overrightarrow{CD};\ \overrightarrow{BR}\right)$

1.2.13 Relativement à une base $\mathfrak{B}$ de V_3, on donne les vecteurs

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

.

a) Former le vecteur $\vec{v}$ tel que $\vec{v} + 2\vec{a} = \vec{b} - 2\vec{c}$.

b) Déterminer le vecteur $\vec{t}$ tel que $5\vec{t} - \vec{a} = \frac{3}{2}\left(2\vec{c} - \frac{3}{2}\vec{t}\right) + \frac{5}{6}\vec{b}$

1.2.14 Exprimer le vecteur $\vec{v}$ comme combinaison linéaire de $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ si :

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -16 \\ 10 \\ 7 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 52 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ 21 \end{pmatrix}$

d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

1.3 Alignement, colinéarité, coplanarité et milieux

1.3.1 Relativement à une base $\mathfrak{B}$ de V_2, on considère les vecteurs :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix},\ \vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix},\ \vec{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix},\ \vec{g} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3/2 \end{pmatrix},\ \vec{h} = \begin{pmatrix} 1/9 \\ 1/3 \end{pmatrix},\ \vec{i} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2/3 \end{pmatrix}.$$

Regrouper les vecteurs qui sont colinéaires.

1.3.2 Déterminer m pour que les vecteurs suivants soient colinéaires :

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -2 \\ m+4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} m \\ m+4 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 \\ m-1 \end{pmatrix}$

1.3.3 Relativement à une base $\mathfrak{B}$ de V_2, on donne les vecteurs

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix},\quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Déterminer un nombre réel λ et un vecteur $\vec{x}$ colinéaire à $\vec{a}$ tels quel $\vec{x} + \lambda\vec{b} = \vec{c}$

1.3.4 Déterminer dans chaque cas si les trois vecteurs sont coplanaires :

a) $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ -11 \\ 4 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ -3/4 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$

1.3.5 Déterminer k pour que les vecteurs suivants soient coplanaires :

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ k \end{pmatrix}$$

1.3.6 Calculer les vecteurs qui sont à la fois coplanaire à $\vec{a}$ et $\vec{b}$ et coplanaires à $\vec{d}$ et $\vec{f}$, si

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix},\ \vec{d} = \begin{pmatrix} 35 \\ 14 \\ -10 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{f} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1.3.7 On donne les points $A(5;2;-3)$, $B(8;0;5)$, $C(-2;-4;1)$ et $D(4;-6;3)$. Calculer les composantes des vecteurs suivants :

a) $\overrightarrow{AB}$

b) $\overrightarrow{BD}$

c) $\overrightarrow{CA}$

d) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$

e) $\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}$

f) $4\overrightarrow{CD}-3\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BC}\right)$

1.3.8 On donne les points $A(1;1)$, $B(10;5)$ et $C(4;12)$. Calculer les coordonnées du point D tel que :

a) $ABCD$ soit un parallélogramme

b) $ABDC$ soit un parallélogramme

1.3.9 Calculer les coordonnées des points qui divisent le segment $[AB]$ en cinq parties égales, si $A(2;3)$ et $B(3;8)$.

1.3.10 On donne les sommets $A(3;-2;5)$ et $B(7;5;10)$ d'un parallélogramme $ABCD$, ainsi que le point d'intersection $P(5;4;6)$ de ses diagonales. Calculer les coordonnées des deux autres sommets C et D.

1.3.11 Les points M, N et P suivants sont-ils alignés ?

$$M(13;-22;2) \qquad N(-5;-10;26) \qquad P(-38;12;60)$$

1.3.12 Déterminer dans chaque cas la constante k pour les points A, B et C soient alignés :

a) $A(1;2)$, $B(-3;3)$ et $C(k;1)$

b) $A(2;k)$, $B(7k-29;5)$ et $C(-4;2)$.

1.3.13 On donne trois points A, B et C. Déterminer, dans les cas suivants, le nombre réel α pour qu'ils soient alignés :

a) $A(2;3;5)$, $B(3;5;8)$, $C(5;9;\alpha)$.

b) $A(\alpha;-3;-4)$, $B(3;1;0)$, $C(0;\alpha+2;\alpha+1)$.

1.3.14 On donne $A(7;-3)$ et $B(23;-6)$. Déterminer le point C de l'axe Ox qui est aligné avec A et B.

1.3.15 Soit $A(-2;14)$, $B(6;-2)$, $C(4;-2)$ et $D(6;10)$. Déterminer le point P d'intersection des droites AB et CD.

1.3.16 Les droites AB et CD de l'espace sont-elles confondues, strictement parallèles, sécantes ou gauches ? Traiter les cas ci-dessous :

a) $A(6;4;-4)$ $\quad B(4;0;-2)$ $\quad C(7;0;-2)$ $\quad D(11;-4;0)$;

b) $A(-4;2;1)$ $\quad B(-1;1;3)$ $\quad C(0;5;2)$ $\quad D(9;2;4)$;

c) $A(8;0;3)$ $\quad B(-2;4;1)$ $\quad C(8;3;-2)$ $\quad D(0;0;5)$;

d) $A(2;-3;1)$ $\quad B(3;-2;3)$ $\quad C(0;-5;-3)$ $\quad D(5;0;7)$?

1.3.17 On donne les points $A(3;2)$, $B(-5;6)$ et $C(-2;-3)$.
Trouver les coordonnées des points situés respectivement au quart de AB depuis A, aux deux tiers de BC depuis B.

1.3.18 Les points $M(2;-1)$, $N(-1;4)$ et $P(-2;2)$ sont les milieux des côtés d'un triangle dont on demande de calculer les sommets.

1.3.19 Soit les points $A(-4;2)$, $B(1;3)$ et $C(2;5)$. Calculer les coordonnées des milieux des côtés du triangle ABC et celles du centre de gravité de ce triangle.

1.3.20 On donne trois points A, B et C. Calculer les coordonnées du sommet D du parallélogramme $ABCD$, celles des milieux M, N, P et Q des côtés AB, BC, CD, DA ainsi que celles des centres de gravité G_1 et G_2 des triangles ABC et CDA.

$$A(-4;1;3) \quad B(4;3;6) \quad C(4;-6;3)$$

1.3.21 On considère les points $A(2;-1)$ et $B(0;3)$.

a) Déterminer le point C tel que le centre de gravité du triangle ABC soit l'origine O du repère.

b) Déterminer ensuite le point D tel que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme.

1.4 Produit scalaire et norme

1.4.1 Calculs de normes

a) Calculer la norme des vecteurs du plan ou de l'espace :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 1/2 \\ 5/2 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 6/10 \\ -4/5 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

b) Etablir que les vecteurs suivants sont unitaires : $\begin{pmatrix} -1/\sqrt{5} \\ 6/\sqrt{45} \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ 2/-3 \end{pmatrix}$.

c) On donne les vecteurs $\vec{a}=\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix} 12 \\ -5 \end{pmatrix}$ et $\vec{c}=\begin{pmatrix} -6 \\ 0 \end{pmatrix}$. Calculer

$$\|\vec{a}\|+\|\vec{b}\|+\|\vec{c}\|;\ \|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\|;\ \|-2\vec{a}\|+2\|\vec{a}\|;\ \|\vec{a}\|\vec{c};\ \frac{1}{\|\vec{a}\|}\vec{a};\ \left\|\frac{1}{\|\vec{a}\|}\vec{a}\right\|$$

d) On donne $\vec{d}=\begin{pmatrix} 8 \\ k-1 \end{pmatrix}$. Calculer le nombre k sachant que la norme de $\vec{d}$ vaut 10.

e) On donne $\vec{u}=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}=\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$. Calculer le nombre m tel que

$$\|\vec{u}+m\vec{v}\|=\sqrt{82}$$

1.4.2 Calculer le périmètre du triangle ABC si $A(2;1;3)$, $B(4;3;4)$ et $C(2;6;-9)$.

1.4.3 Etablir que le triangle ABC est isocèle, puis calculer son aire si $A(6;4)$, $B(12;-2)$ et $C(17;9)$.

1.4.4 Soit $A(7;1)$, $B(5;5)$, $C(5;-3)$ et $I(2;1)$. Prouver que les points A, B et C sont situés sur le même cercle centré en I.

1.4.5 Déterminer k pour que $P(2;-1)$ soit situé sur la médiatrice du segment AB, si $A(5;3)$ et $B(-2;k)$.

1.4.6 Soit $A(1;2)$, $B(3;8)$ et $P(x;y)$. A quelle condition sur x et y le point P est-il situé sur la médiatrice de AB ?

1.4.7 Déterminer le centre du cercle passant par les points $K(-3;6)$, $L(9;-10)$ et $M(-5;4)$.

1.4.8 On considère deux vecteurs non nuls $\vec{a}$ et $\vec{b}$. Trouver une condition géométrique qui assure que $\|\vec{a}+\vec{b}\| = \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$.

1.4.9 Indiquer dans chacun des cas si les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont perpendiculaires :

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 53 \\ -41 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 41 \\ 53 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 16 \end{pmatrix}$

d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3/4 \end{pmatrix}$

1.4.10 Indiquer dans chacun des cas si les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont perpendiculaires :

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 9 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix}$

1.4.11 Résoudre les problèmes suivants :

a) Calculer m, sachant que les vecteurs $\begin{pmatrix} m \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ sont perpendiculaires.

b) Soit $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$. Déterminer le nombre k pour lequel les vecteurs $\vec{a} + k\vec{b}$ et $\vec{c}$ sont perpendiculaires.

c) On donne $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 11 \end{pmatrix}$. Déterminer un vecteur $\vec{w}$ et un nombre k, de telle sorte que $\vec{u}$ et $\vec{w}$ soient perpendiculaires et que $\vec{v} = k\vec{u} + \vec{w}$.

d) Déterminer a et b pour que le vecteur $\begin{pmatrix} 7 \\ a \\ b \end{pmatrix}$ soit à la fois orthogonal à $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$ et à $\begin{pmatrix} -5 \\ 20 \\ 9 \end{pmatrix}$.

1.4.12 Montrer que le quadrilatère $ABCD$ est un trapèze rectangle en A, puis calculer son aire, si $A(7;5)$, $B(8;7)$, $C(12;5)$ et $D(13;2)$.

1.4.13 Montrer que le quadrilatère $ABCD$ est un rectangle, si $A(-4;5;3)$, $B(-1;1;5)$, $C(5;5;4)$ et $D(2;9;2)$.

1.4.14 On donne $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$. Evaluer les expressions suivantes lorsqu'elles sont définies :

a) $\vec{a} \cdot \left(7\vec{b} + \vec{c}\right)$

b) $\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) \vec{b}$

c) $\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) + \left(\vec{c} \cdot \vec{d}\right)$

d) $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \cdot \left(\vec{c} - \vec{d}\right)$

e) $\|\vec{d}\| \left(\vec{a} \cdot \vec{d}\right)$

f) $\vec{a} + \left(\vec{b} \cdot \vec{c}\right)$

1.4.15 Considérons un losange $ABCD$ dans lequel on pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$. Prouver que $\vec{u} + \vec{v}$ et $\vec{u} - \vec{v}$ sont perpendiculaires.

1.4.16 On donne les points $A(-2;4)$, $B(1;-2)$ et $C(\lambda;\lambda)$. Déterminer λ pour que le triangle ABC soit rectangle

a) en A ;

b) en B ;

c) en C ;

Représenter ensuite les solutions sur une figure à l'échelle.

1.4.17 On donne les points $A(1;4)$, $B(5;2)$ et le point $C(k;5)$, $k \in \mathbb{R}$. Déterminer tous les points C du plan tels que le triangle de sommets A, B et C soit un triangle rectangle. Parmi les triangles trouvés, en est-il qui sont isocèles ?

1.4.18 On donne les points $A(-2;3;-2)$ et $B(-6;-1;1)$. Calculer le point P qui est situé sur l'axe Ox et tel que le triangle APB soit rectangle en P.

1.4.19 Les droites AB et CD de l'espace sont dites **orthogonales** si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont perpendiculaires. Des droites orthogonales peuvent être gauches ou sécantes. Dans ce dernier cas, on dit que les droites sont **perpendiculaires**.
Examiner dans chacun des cas si les droites AB et CD sont perpendiculaires :

a) $A(8;-1;3)$, $B(11;11;5)$, $C(4;1;-1)$ et $D(6;0;2)$.

b) $A(1;3;5)$, $B(-2;4;1)$, $C(-2;2;-6)$ et $D(-10;10;2)$.

1.4.20 Soit $A(-7;-3)$, $B(11;3)$ et $C(1;-4)$. Calculer le point D qui est le pied de la hauteur issue de C dans le triangle ABC.

1.4.21 Soit $A(-3;-1)$, $B(1;3)$, $C(-1;7)$ et $D(0;3)$. Déterminer le point P de la droite CD qui est situé à la même distance des points A et B.

1.4.22 Représenter les vecteurs $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ sur une figure à l'échelle. Construire et calculer la projection de $\overrightarrow{b}$ sur $\overrightarrow{a}$.

1.4.23 Représenter les vecteurs $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ sur une figure à l'échelle, puis construire la projection $\overrightarrow{a}'$ de $\overrightarrow{a}$ sur $\overrightarrow{b}$, ainsi que la projection $\overrightarrow{b}'$ de $\overrightarrow{b}$ sur $\overrightarrow{a}$. Calculer les composantes des vecteurs $\overrightarrow{a'}$ et $\overrightarrow{b'}$.

1.4.24 Calculer dans chaque cas la longueur de la projection orthogonale de $\overrightarrow{a}$ sur $\overrightarrow{b}$.

a) $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} -8 \\ -6 \end{pmatrix}$

b) $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

1.4.25 Calculer la projection $\overrightarrow{a}'$ de $\overrightarrow{a}$ sur $\overrightarrow{b}$, ainsi que la projection $\overrightarrow{b}'$ de $\overrightarrow{b}$ sur $\overrightarrow{a}$, si :

a) $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \end{pmatrix}$

b) $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

c) $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

1.4.26 Indiquer si l'angle formé par les deux vecteurs est aigu, obtus ou droit :

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

1.4.27 On donne les vecteurs

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Décomposer le vecteur $\vec{a}$ en une somme de deux vecteurs, le premier parallèle à $\vec{b}$, le second perpendiculaire à $\vec{b}$.

1.4.28 Calculer l'angle aigu formé par les droites AB et CD, si $A(1;5)$, $B(7;3)$, $C(2;1)$ et $D(-3;1)$.

1.4.29 On considère un cube $ABCD\ EFGH$. Notons M, N et P les milieux respectifs de AE, EH et AB. Calculer l'angle entre les vecteurs suivants :

a) $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BG}$;

b) $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{BH}$;

c) $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$.

1.4.30 L'aire du triangle ABC vaut 3 et le centre de gravité de ce triangle est situé sur l'axe Ox. Calculer le sommet C, connaissant $A(3;1)$ et $B(1;-3)$.

1.4.31

On donne les points $A(-2;-1)$, $B(7;0)$ et $C(1;5)$.

Calculer les coordonnées du quatrième sommet du parallélogramme $ABCD$.

1.4.32

Trouver les coordonnées du troisième sommet C d'un triangle ABC dont on donne deux sommets $A(6;-1)$, $B(-2;6)$ et le centre de gravité $G(3;4)$.

1.4.33
On donne les points $A(4;0)$, $B(6;10)$, $C(0;6)$ et $D(-2;-4)$.

a) Calculer les coordonnées des points M, R, S, T milieux respectivement de AB, BC, CD, AD.

b) Montrer que le quadrilatère $TMRS$ est un parallélogramme.

c) Calculer les coordonnées du point d'intersection des droites TR et MS.

1.5 Produit vectoriel et produit mixte

1.5.1 On donne les vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

a) Calculer les produits vectoriels $\vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{c}$, $\vec{b} \times \vec{c}$, $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \times \vec{b}$, $(2\vec{a}) \times \left(-3\vec{b}\right)$, $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \times \left(\vec{a} - \vec{b}\right)$, $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \vec{c}$ et $\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)$.

b) Le produit vectoriel est-il associatif ?

1.5.2 Former un vecteur normal au plan ABC, si $A(0;2;1)$, $B(0;1;0)$ et $C(1;0;2)$.

1.5.3 Simplifier l'expression $\vec{a} \times \left(\vec{b} + \vec{c}\right) + \vec{b} \times (\vec{c} + \vec{a}) + \vec{c} \times \left(\vec{a} + \vec{b}\right)$

1.5.4 On donne les vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$. Existe-t-il un vecteur $\vec{x}$ tel que $\vec{a} \times \vec{x} = \vec{b}$?

1.5.5 Calculer l'angle aigu que forme la droite OC avec le plan ABC, dans les cas suivants :

a) $A(1;0;0)$, $B(0;1;0)$ et $C(2;2;-4)$.

b) $A(0;1;0)$, $B(1;0;1)$ et $C(1;2;2)$.

1.5.6 On donne un tétraèdre de sommets $A(1;-5;2)$, $B(3;-6;0)$, $C(-3;6;15)$ et $D(6;5;-3)$.

a) Calculer l'angle aigu que forment les faces ABC et ABD.

b) Calculer l'angle aigu que forme l'arête AD avec la face ABC.

1.5.7 On considère les vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$. Vérifier avec ces vecteurs l'identité de Lagrange.

1.5.8

a) Vérifier que $ABCD$ est un parallélogramme et calculer son aire avec $A(2;1;-2)$, $B(2;3;0)$, $C(6;6;5)$, $D(6;4;3)$.

b) Calculer l'aire du triangle ABC si $A(3;-2;3)$, $B(4;0;3)$ et $C(6;0;-3)$.

c) Déterminer la longueur de la hauteur issue de A dans la triangle ABC où $A(-1;2;-5)$, $B(5;4;0)$ et $C(11;8;3)$.

d) Soient $\vec{a}$ et $\vec{b}$ deux vecteurs de l'espace. Prouver algébriquement que le rapport de l'aire du parallélogramme construit sur $\vec{a}+\vec{b}$ et $\vec{a}-\vec{b}$ avec celle du parallélogramme construit sur $\vec{a}$ et $\vec{b}$ est égal à 2.

e) On considère un cube $ABCD\ EFGH$ dont les arêtes mesurent a. On désigne par M le milieu de l'arête AE. Exprimer l'aire du triangle MCH en fonction de a.

1.5.9

a) Les vecteurs suivants sont-ils coplanaires : $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ -11 \end{pmatrix}$?

b) Les points ci-dessous sont-ils coplanaires ?

$$A(0;3;-2), \quad B(1;2;2), \quad C(-3;1;5), \quad D(12;-3;5)$$

c) Déterminer k pour que les vecteurs ci-dessous soient coplanaires.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ k \end{pmatrix}$$

d) Déterminer sur l'axe Oz un point coplanaire à $A(1;1;1)$, $B(0;-2;3)$, $C(4;1;-1)$.

e) Calculer $\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD}\right]$, si $A\left(\frac{1}{2};\frac{-1}{2};\frac{1}{2}\right)$, $B\left(\frac{5}{6};\frac{1}{6};\frac{-1}{2}\right)$, $C\left(\frac{5}{4};-1;\frac{5}{4}\right)$ et $D\left(\frac{3}{2};\frac{-1}{10};\frac{-1}{10}\right)$.

1.5.10 Soit $(\vec{e_1};\vec{e_2};\vec{e_3})$ une base orthonormée directe de l'espace. Les triplets suivants sont-ils orientés positivement ou négativement ?

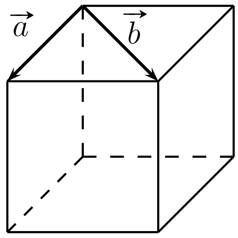
a) $(\vec{e_1};\vec{e_3};\vec{e_2})$;

b) $(\vec{e_2};-\vec{e_3};\vec{e_1})$;

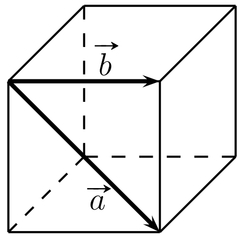
c) $(-\vec{e_2};\vec{e_1};\vec{e_3})$.

1.5.11 Le cube dessiné a des arêtes de longueur 1. Représenter le vecteur :

a) $\vec{a} \times \left(\vec{a} \times \vec{b}\right)$



b) $\left(\vec{b} \times \vec{a}\right) \times \vec{b}$



1.5.12 Représenter graphiquement des vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$, avec $\vec{b} \neq \vec{c}$ pour lesquels $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c}$.

1.5.13 Déterminer k et $\vec{x}$ de telle sorte que $\vec{a} \times \vec{x} = \vec{b}$, si $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} k \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$.

1.5.14 Illustrer l'affirmation suivante :
« Si $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan α et si $\vec{m}$ est un vecteur normal au plan β, alors $\vec{n} \times \vec{m}$ est un vecteur directeur de la droite d'intersection de α et β (les deux plans sont supposés sécants). »

1.5.15 Calculer la distance du point $P(1;2;2)$ à la droite passant par $A(1;-1;2)$ et $B(0;-2;1)$.

1.5.16 Pour visser ou dévisser un boulon centré au point B à l'aide d'une clé, on exercice une force sur l'extrémité M du manche de la clé (dans un plan perpendiculaire à l'axe de rotation du boulon). L'efficacité de cette force à faire tourner le boulon dépendra alors de la longueur du manche, de l'intensité de la force exercée. ainsi que de l'angle de la force par rapport au manche.
Désignons la force $\vec{f}$, posons $\vec{l} = \overrightarrow{BM}$, et notons Ψ l'angle des vecteurs $\vec{f}$ et $\vec{l}$. Les physiciens ont établi que l'efficacité de la force à faire tourner le boulon est proportionnelle à $\|\vec{f}\| \cdot \|\vec{l}\| \cdot \sin\Psi$.
On définit que le vecteur $\vec{m} = \vec{l} \times \vec{f}$ est le **moment de force** déterminé par $\vec{f}$ et $\vec{l}$.
Réaliser une bonne figure illustrant les divers éléments ci-dessus.
Quelle est la direction de $\vec{m}$? Dans quel sens est le vecteur $\vec{m}$? Que vaut la norme de $\vec{m}$?

1.5.17 Démontrer les formules de calcul de volume pour le parallélépipède et pour le tétraèdre.

Indications pour la première formule : on considère comme base le parallélogramme construit sur $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$, et comme hauteur le vecteur obtenu en projetant $\overrightarrow{c}$ sur $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$.

1.5.18

a) Vérifier que $ABCD\ EFGH$ est un parallélépipède et calculer son volume si :

$A(-1;-1;7)$	$C(0;1;6)$	$E(2;-2;3)$	$G(3;0;2)$
$B(-2;1;6)$	$D(1;-1;7)$	$F(1;0;2)$	$H(4;-2;3)$

b) Calculer le volume du tétraèdre $PQRS$ si

$$P(2;-1;1), \quad Q(5;5;4), \quad R(3;2;-1), \quad S(4;1;3).$$

c) Soit $A(2;1;-1)$, $B(3;0;1)$, $C(2;-1;3)$. Déterminer un point D situé sur l'axe Oy tel que le tétraèdre $ABCD$ ait un volume égale à 5.

d) Calculer la hauteur issue de D dans le tétraèdre $ABCD$ si :
$A(2;3;1)$, $B(4;1;-2)$, $C(6;3;7)$, $D(-5;-4;8)$.

1.5.19 Soit ABC un triangle dont les côtés mesurent a, b et c. La formule de Héron donne l'aire S du triangle :

$$S = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}, \text{ où } p = \frac{1}{2}(a+b+c)$$

Démontrer cette formule à l'aide de l'identité de Lagrange.

1.5.20 On donne les points

$A(1;4;1)$	$C(-5;-11;5)$	$Q(3;-11;-1)$
$B(-2;-8;3)$	$P(3;5;-1)$	$R(0;-3;1)$

Démontrer que les plans ABC et PQR sont parallèles.

1.6 Solutions des exercices

Propriétés des vecteurs dans le plan et l'espace

1.1.1 18 vecteurs :
$\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{OF}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CF}$, $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{FC}$.

1.1.4

a) $\overrightarrow{AC}$

b) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DC}$

c) $\overrightarrow{DC}$

d) $\overrightarrow{DA}$

e) $\vec{0}$

1.1.5

a) $\overrightarrow{AC}$ b) $\overrightarrow{AH}$ c) $\overrightarrow{HA}$ d) $\overrightarrow{EA}$ e) $\overrightarrow{AC}$ f) $\overrightarrow{AE}$

1.1.6

a) $\overrightarrow{FE}$ b) $\overrightarrow{AC}$ c) $\overrightarrow{AB}$ d) $\overrightarrow{DB}$ e) $\overrightarrow{AD}$ f) $\overrightarrow{FC}$

1.1.9 $\vec{v}=\vec{a}+3\vec{b}$

1.1.10

a) $2\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{BC}$

b) $2\overrightarrow{PQ}=2(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CQ})=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BC}$

1.1.11 a) $\vec{c}=6\vec{a}-2\vec{b}$ b) $\vec{d}=-\vec{a}-\vec{b}$ c) $\vec{x}=2\vec{a}+6\vec{b}$

1.1.13

a) $\overrightarrow{EP}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{c}$

b) $\overrightarrow{EM}=\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$

c) $\overrightarrow{EN}=\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}$

d) $\overrightarrow{NM}=\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$

e) $\overrightarrow{PN}=\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}$

f) $\overrightarrow{NP}=-\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{c}$

g) $\overrightarrow{PM}=\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{c}$

1.1.14

a) $\overrightarrow{PB}=\frac{1}{3}\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}$ b) $\overrightarrow{PM}=\frac{1}{3}\vec{a}-\frac{1}{6}\vec{b}$ c) $\overrightarrow{DM}=\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$

1.1.18 $\overrightarrow{HG}, \overrightarrow{HF}, \overrightarrow{HE}, \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{GH}, \overrightarrow{FH}, \overrightarrow{EH}, \overrightarrow{MA}$

Repères, bases et combinaisons linéaires

1.2.1

a) Oui. $\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AJ} - \frac{1}{2}\overrightarrow{EK}$

b) Oui. $\overrightarrow{KB} = \overrightarrow{ID} + 3\overrightarrow{LG}$

c) Non.

1.2.2

a) $\overrightarrow{SD} = \vec{u} - \vec{v} + \vec{w}$

b) $\overrightarrow{AC} = -\vec{u} + \vec{w}$

c) $\overrightarrow{BD} = \vec{u} - 2\vec{v} + \vec{w}$

d) $\overrightarrow{AB} = -\vec{u} + \vec{v}$

e) $\overrightarrow{BC} = -\vec{v} + \vec{w}$

f) $\overrightarrow{AD} = -\vec{v} + \vec{w}$

1.2.3

a) Oui. $\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{GH}$, $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{DG} + \overrightarrow{GH}$, $\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{DG}$

b) Non.

c) Oui. $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{EG} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DB} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{EG}$

d) Oui. $\overrightarrow{GH} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{EC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DF}$, $\overrightarrow{EC} = -2\overrightarrow{GH} - \overrightarrow{DF}$, $\overrightarrow{DF} = -2\overrightarrow{GH} - \overrightarrow{EC}$

1.2.4

$\vec{a} = -\frac{3}{7}\vec{c} - \frac{1}{7}\vec{d}$; $\vec{b} = \frac{5}{14}\vec{c} + \frac{2}{7}\vec{d}$

1.2.5

a) $\overrightarrow{AB} = (1;0)$, $\overrightarrow{AD} = (0;1)$, $\overrightarrow{AM} = (1/2;0)$, $\overrightarrow{AQ} = (0;1/2)$ $\overrightarrow{AN} = (1;1/2)$, $\overrightarrow{AP} = (1/2;1)$, $\overrightarrow{AO} = (1/2;1/2)$, $\overrightarrow{OB} = (1/2;-1/2)$, $\overrightarrow{QP} = (1/2;1/2)$, $\overrightarrow{CM} = (-1/2;-1)$.

b) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AQ} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AN} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$,
$\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AO} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{QP} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$,
$\overrightarrow{CM} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

1.2.6

a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{FA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{EA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{EC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$
$\overrightarrow{DB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{EB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OE} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

b) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{FA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{EA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{EC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
$\overrightarrow{DB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{EB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,
$\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OE} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

c) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{FA} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{EA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,
$\overrightarrow{EC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{DB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{EB} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$,
$\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OE} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

d) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{FA} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{EA} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$,
$\overrightarrow{EC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{DB} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{EB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$
$\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OE} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

1.2.7 b) $\vec{b} + \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $3\vec{b} + 2\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$

1.2.8

a) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 7 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -\frac{11}{4} \\ 5 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -41 \\ 27 \end{pmatrix}$

1.2.9 $k = 3, m = 2$

1.2.10 $\begin{pmatrix} -98 \\ 20 \end{pmatrix}$

1.2.11

a) $\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathfrak{B}}$ $\vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathfrak{B}}$

b) $\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathfrak{B}'}$ $\vec{e_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathfrak{B}'}$

1.2.12

a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$\overrightarrow{AF} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AG} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AH} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$,

$\overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AR} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AK} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

b) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$\overrightarrow{AF} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AG} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AH} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$,

$\overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AR} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AK} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$.

1.2.13

a) $\vec{v} = (-3; 13; -7)$

b) $\vec{t} = (54/29; -34/29; 14/29)$

1.2.14

a) $\vec{v} = 4 \cdot \vec{a} + 5 \cdot \vec{b} + 2 \cdot \vec{c}$

b) $\vec{v} = 1 \cdot \vec{a} + 3 \cdot \vec{b} + 2 \cdot \vec{c}$

c) $\vec{v} = (-t - 14) \cdot \vec{a} + (7 - t) \cdot \vec{b} + t \cdot \vec{c} \qquad t \in \mathbb{R}$

d) Il n'est pas possible d'exprimer le vecteur $\vec{v}$ comme combinaison linéaire des trois autres.

Alignement, colinéarité, coplanarité et milieux

1.3.1 $\vec{a} = 1/2\,\vec{d} = 9\,\vec{h}$; $\vec{b} = -3/2\,\vec{\imath}$; $\vec{c} = -2\,\vec{g}$; $\vec{f}$; $\vec{e}$

1.3.2 a) $m = -14$ b) $m = 6$ ou $m = -2$

1.3.3 $\lambda = 35/29$ et $\vec{x} = (105/29; -30/29)$

1.3.4

a) Les vecteurs sont coplanaires.

b) Les vecteurs sont coplanaires.

c) Les vecteurs ne sont pas coplanaires.

d) Les vecteurs ne sont pas coplanaires.

1.3.5 $k = 1/2$ ou $k = 3$

1.3.6 Les vecteurs sont de la forme $k \cdot (65, 29, -10)$ avec $k \in \mathbb{R}$.

1.3.7

a) $(3; -2; 8)$

b) $(-4; -6; -2)$

c) $(7; 6; -4)$

d) $(9; -4, 10)$

e) $(1; 8; -6)$

f) $(33; -14; 32)$

1.3.8

a) $(-5; 8)$

b) $(13; 16)$

1.3.9 $(2.2; 4)$ $(2.4; 5)$ $(2.6; 6)$ $(2.8; 7)$

1.3.10 $C = (7; 10; 7)$ $D = (3; 3; 2)$

1.3.11 Les points ne sont pas alignés.

1.3.12

a) $k = 5$

b) $k = 1$ ou $k = 32/7$

1.3.13

a) $\alpha = 14$

b) $\alpha = -3$ ou $\alpha = 5$

1.3.14 $C(-9; 0)$

1.3.15 $P(4.5, 1)$

1.3.16

a) Les droites sont sécantes.

b) Les droites sont gauches.

c) Les droites sont gauches.

d) Les droites sont strictement parallèles.

1.3.17 $(1;3)$, respectivement $(-3;0)$

1.3.18 $A(-5;7)$, $B(1;-3)$, $C(3;1)$

1.3.19 $M_{AB}(-3/2;5/2)$, $M_{AC}(-1;7/2)$, $M_{BC}(3/2;4)$, $G(-1/3;10/3)$

1.3.20 $D(-4;-8;0)$, $M(0;2;9/2)$, $N(4;-3/2;9/2)$, $P(0;-7;3/2)$, $Q(-4;-7/2;3/2)$, $G_1(4/3;-2/3;4)$, $G_2(-4/3;-13/3;2)$

1.3.21

a) $C(-2;-2)$

b) $D(0;-6)$

Produit scalaire et norme

1.4.1

a) $5\,;\ \sqrt{73}\,;\ \sqrt{26}/2\,;\ 1\,;\ 3\,;\ \sqrt{3}\,;\ 5$

b) Les vecteurs sont unitaires, car leur norme vaut 1.

c) $24\,;\ \sqrt{82}\,;\ 20\,;\ (-30;0)\,;\ (3/5;4/5)\,;\ 1$

d) $k \in \{-5;7\}$

e) $m \in \{-23/10;3/2\}$

1.4.2 $\sqrt{182}+16 \simeq 29.5$

1.4.3 Le triangle est isocèle car $\|\overrightarrow{AC}\| = \|\overrightarrow{BC}\|$. Son aire vaut 48 unités carrées.

1.4.4 $\|\overrightarrow{IB}\| = \|\overrightarrow{IA}\| = \|\overrightarrow{IC}\| = 5$

1.4.5 $k=-4$ ou $k=2$

1.4.6 Il faut que $(x; y)$ satisfasse l'équation $x + 3\,y = 17$.

1.4.7 $(3; -2)$

1.4.8 Il faut que les vecteurs soient colinéaires.

1.4.9

a) Les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ ne sont pas perpendiculaires.

b) Les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont perpendiculaires.

c) Les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont perpendiculaires.

d) Les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ ne sont pas perpendiculaires.

1.4.10

a) Les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont perpendiculaires.

b) Les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont perpendiculaires.

c) Les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ ne sont pas perpendiculaires.

d) Les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont perpendiculaires.

1.4.11

a) $m = 10/3$

b) $k = 4/7$

c) $\vec{w} = (-6; 2)$ et $k = 3$

d) $a = 4$ et $b = -5$

1.4.12 En calculant les produits scalaires, on constate que $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{AB}$. Le trapèze est donc rectangle en A. Son aire vaut 12.5 unités carrées.

1.4.14

a) 102

b) $(55; -11)$

c) 14

d) 50

e) 36

f) Pas défini.

1.4.16

a) $\lambda = 10$

b) $\lambda = -5$

c) $\lambda = -2$ ou $\lambda = 5/2$

1.4.17 Les points possibles sont : $C(1.5; 5)$, $C'(2; 5)$, $C''(4; 5)$, $C'''(6.5; 5)$.
Le triangle $AC''B$ est isocèle en C''.

1.4.18 Les points possibles sont :$P(-1; 0; 0)$ et $P'(-7; 0; 0)$

1.4.19

a) Les droites sont orthogonales mais pas perpendiculaires.

b) Les droites sont perpendiculaires. (Elles se coupent en $E(-5; 5; -3)$.)

1.4.20 $D(-0.1; -0.7)$

1.4.21 $P(1; -1)$

1.4.22 $\vec{p} = (3/2; 1/2)$

1.4.23 Les vecteurs s'écrivent : $\vec{a'} = (168/25; 224/25)$ et $\vec{b'} = (672/169; 280/169)$.

1.4.24

a) $23/5$

b) $18/\sqrt{17}$

1.4.25

a) $\vec{a'} = (0; 0)$ et $\vec{b'} = (0; 0)$

b) $\vec{a'} = (9/25; -12/25)$ et $\vec{b'} = (-3; 0)$

c) $\vec{a'} = (16/13; 0; -24/13)$ et $\vec{b'} = (8/9; 16/9; -16/9)$

1.4.26

a) L'angle est obtus.

b) L'angle est aigu.

1.4.27 $\vec{a} = (20/7; -5/7; 10/7) + (-6/7; -2/7; 11/7)$

1.4.28 $18.43\,^\circ$

1.4.29

a) $60\,^\circ$

b) $70.53\,^\circ$

c) $120\,^\circ$

1.4.30 $C(2; 2)$ ou $C(5; 2)$

1.4.31 $D(-8; 4)$

1.4.32 $C(5; 7)$

1.4.33

a) $M(5; 5)$, $R(3; 8)$, $S(-1; 1)$. $T(1; -2)$

b) $\overrightarrow{SR} = \overrightarrow{TM} = (4; 7)$ et les points ne sont pas alignés

c) $I(2; 3)$

Produit vectoriel et produit mixte

1.5.1

a) $(-12; -4; 8)$, $(-6; -13; 4)$, $(16; -2; 4)$, $(-12; -4; 8)$, $(72; 24; -48)$
$(24; 8; -16)$, $(-36; 52; -28)$, $(6; 40; -4)$

b) Les deux derniers calculs de la question a) montrent que le produit vectoriel n'est pas associatif.

1.5.2 $(-3; -1; 1)$

1.5.3 On sait que pour tous vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c} \in V_3$, la propriété de distributivité du produit vectoriel par rapport à l'addition s'applique :

$$\vec{a} \times \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

On sait également que

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

On peut donc développer notre expression comme suit

$$\begin{aligned}\vec{a}\times\left(\vec{b}+\vec{c}\right)+\vec{b}\times\left(\vec{c}+\vec{a}\right)+\vec{c}\times\left(\vec{a}+\vec{b}\right) &= \vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{a}+\vec{c}\times\vec{a}+\vec{c}\times\vec{b}\\ &= \vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{a}+\vec{a}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{b}\\ &= \vec{a}\times\vec{b}-\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}-\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}-\vec{b}\times\vec{c}\\ &= \vec{0}+\vec{0}+\vec{0}=\vec{0}\end{aligned}$$

1.5.4 Non

1.5.5

a) $7.33\,^\circ$

b) $5.11\,^\circ$

1.5.6

a) $45\,^\circ$

b) $42.88\,^\circ$

1.5.8

a) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}=(0;2;2)$, $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}=(4;3;5)$ et l'aire vaut 12 unités carrées.

b) L'aire du triangle vaut 7 unités carrées.

c) La longueur vaut $22/\sqrt{61}$ unités.

d) –

e) L'aire du triangle est donnée par $3a^2/4$.

1.5.9

a) Oui

b) Non

c) $k=3$ ou $k=1/2$

d) $(0;0;19/9)$

e) $\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD}\right]=0$

1.5.10

a) Négativement

b) Négativement

c) Positivement

1.5.13 $k=-27$ et $\overrightarrow{x}$ est de la forme $(t/3+2;2\,t/3+9;t)$ avec $t\in\mathbb{R}$.

1.5.15 $\sqrt{6}$

1.5.18

a) Le volume du parallélépipède vaut 18 unités cubes.

b) Le volume du tétraèdre vaut 3 unités cubes.

c) Il y a deux points possibles : $D(0;-7;0)$ et $D'(0;8;0)$.

d) La hauteur vaut 11.

1.5.20 Il suffit de vérifier que les vecteurs perpendiculaires aux plans π_{ABC} et π_{PQR} sont colinéaires.

Pour ce faire, on calcule en premier lieu les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AB} = (-3,\ -12,\ 2) \quad \overrightarrow{AC} = (-6,\ -15,\ 4)$$

On fait ensuite le produit vectoriel de ces deux vecteurs :

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-18,\ 0,\ -27)$$

On procède de même pour le plan passant par P, Q et R.

$$\overrightarrow{PQ} = (0,\ -16,\ 0) \quad \overrightarrow{PR} = (-3,\ -8,\ 2)$$

$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = (-32,\ 0,\ -48)$$

On voit bien que les deux vecteurs normaux sont colinéaires :

$$(-32,\ 0,\ -48) = \frac{16}{9} \cdot (-18,\ 0,\ -27)$$

Les deux plans sont donc parallèles.

Chapitre 2

Algèbre

2.1 Développer une expression

2.1.1 Effectuer et réduire :

a) $3 + (xz + y^2)$

b) $3 - (xz + y^2)$

c) $3(xz + y^2)$

d) $(2a + b - c) + (3a - b + c)$

e) $(2a + b - c) - (3a - b + c)$

f) $(2a + b - c)(3a - b + c)$

g) $(x^3 - 2x^2 - 5) + (-4x^3 - 1)$

h) $(x^3 - 2x^2 - 5) - (-4x^3 - 1)$

i) $(x^3 - 2x^2 - 5)(-4x^3 - 1)$

j) $\left(u + \dfrac{v}{4}\right) + \left(\dfrac{3u}{4} - \dfrac{5v}{6}\right)$

k) $\left(u + \dfrac{v}{4}\right) - \left(\dfrac{3u}{4} - \dfrac{5v}{6}\right)$

l) $\left(u + \dfrac{v}{4}\right)\left(\dfrac{3u}{4} - \dfrac{5v}{6}\right)$

2.1.2 Effectuer et réduire :

a) $(a + b)^2$

b) $(a - b)^2$

c) $(a + b)(a - b)$

d) $(a + b)^3$

e) $(a - b)^3$

f) $(a - b)(a^2 + ab + b^2)$

g) $(a + b)(a^2 - ab + b^2)$

2.1.3 Effectuer et réduire :

a) $(a + 8)^2$

b) $(y^4 - 3b)^3$

c) $(u - 3)(u + 3)$

d) $(2m - 5n)(4m^2 + 10mn + 25n^2)$

e) $(7-f)^2$

f) $(4+2z^2)^3$

g) $(3+y^3)(y^6-3y^3+9)$

h) $(x^2+y^2)(x^2-y^2)$

i) $(t+3u^5)^3$

j) $(2x-7)^2$

k) $(b^2-c^3)(b^2c^3+b^4+c^6)$

l) $(a-3b)^3$

2.1.4 Réduire au maximum.

a) $(x-1)^2-(y+1)^2$

b) $(1+x)^2-(1-x)^2$

c) $\left(\frac{1}{2}\,x+\frac{1}{2}\,y\right)^2-\left(\frac{1}{2}\,x-\frac{1}{2}\,y\right)^2$

d) $(2\,x+y)^2+(2\,x-y)^2-2\,(2\,x+y)(2\,x-y)$

e) $(3\,x+y)(3\,x-y)-(3\,x+2\,y)^2-(x-3\,y)^2$

f) $(x+2)^2-(x+1)^2-(x+1)(x-1)-x\,(x+4)-4$

g) $(x+y)(x-y)+(x-y)^2-(x+y)^2+y\,(4\,x+y)$

h) $(x^2+4\,y^2)(x+2\,y)(x-2\,y)-(x^2-2\,y^2)^2$

i) $(3\,x-2\,y)^2+(4\,x+y)(4\,x-y)-(5\,x-3\,y)^2+6\,y(y-3\,x)$

j) $(2\,x-y)^2\,(2\,x+y)^2-(x-2\,y)^2(x+2\,y)^2-15\,(x+y)(x-y)(x^2+y^2)$

2.1.5 Réduire au maximum.

a) $-(6\,ab^2-7\,x^3)(6\,ab^2+7\,x^3)$

b) $(4\,x^2-7\,y^3)^2-(x^2-5\,y^2)(4\,x^2+y^3)$

c) $(3\,x-2\,y)^2-(4\,x+5\,y)^2-2\,(2\,x-y)(3\,x-5\,y)$

d) $(2\,a-3\,b)^3-(2\,a-3\,b)^2-(2\,a-3\,b)$

2.1.6 Soit $p(x)=2\,x^3-3\,x^2+5\,x-1$ et $q(x)=3\,x^3+2\,x^2-4\,x+2$. Déterminer

a) le polynôme $p+q$

b) le degré du polynôme $p\cdot q$, ainsi que le coefficient de son terme de degré 4.

2.1.7 Soit $p(x)=x^2+x+2$ et $q(x)=x^3-2\,x$. Déterminer les polynômes

$$p+q, \quad p-q, \quad \text{et} \quad p\cdot q$$

2.1.8 Soit les polynômes

$a(x) = 3\,x^2 - 4\,x + 3$, $p(x) = x^4 + 2\,x^3 - 2\,x^2 - 4\,x + 17$ et $q(x) = 2\,x^3 - 3\,x^2 - 5\,x + 18$

a) calculer et réduire au maximum $(a(x))^2$

b) calculer $p - q$

c) déterminer le degré du polynôme $p \cdot q$

d) déterminer le coefficient du polynôme $p \cdot q$ de degré 7

e) déterminer le coefficient du polynôme $p \cdot q$ de degré 4

2.1.9 Effectuer et réduire.

a) $(2\,x - y - z) - (3\,x + 2\,y - 3\,z) - (4\,x + y - z) + (5\,x + 4\,y - 4\,z)$

b) $\left(\frac{1}{2}\,x^3 - \frac{1}{6}\,x^2y\right) - \left(x^3 - \frac{1}{8}xy^2 - \frac{1}{10}y^3\right) + \left(\frac{1}{2}\,x^3 - \frac{1}{2}\,x^2y + \frac{1}{8}\,xy^2 + \frac{1}{10}\,y^3\right)$
$- \left(-\frac{2}{3}\,x^2y - \frac{3}{4}xy^2 - \frac{4}{5}y^3\right)$

c) $x^2y - \{-\left[2xy^2 + 7x^3 + 5x^2y\right] + 4xy^2\} - 6x^2y$

d) $2\,xy + 3\,y^2 - \left\{-\frac{1}{2}\,x^2y + \left[\frac{1}{2}\,y^2 - \left(3\,xy + \frac{5}{4}\,x^2y\right)\right] - \left(\frac{1}{8}\,x^2y - 4\,y^2\right)\right\}$

e) $\left(\frac{1}{3}\,x^2\right)^3 - x^4 - \left\{\frac{3}{4}\,x^2y^2 - \left(\frac{1}{2}\,x^3\right)^2 + \left[(-2\,x)^4 + \frac{1}{4}\,x^2y^2 - \frac{8}{27}\,x^6\right]\right\}$

f) $(3\,x^2 - x + 2)(4\,x + 3)(2\,x - 1)$

g) $(x - 3)(x + 4)(x - 5)(x + 6)$

h) $x(x + 1) - 3\,x(-x + 3) + 2(x^2 - x)$

i) $[x(x + y) - y(x - y)]\,(x + y) - xy(x + y)$

j) $(x + y)(x - 2\,y)(2\,x - y) - (2\,x + y)(x - 2\,y)(x - y)$

2.1.10 Réduire.

a) $(x - 1)^3 - (x - 1)(x + 1)(x - 3)$

b) $(x + 1)(x - 1)^2 - (x - 2)^3$

c) $(x^2 + 2\,x + 1)^2 - 4\,x(x^2 + 1) - (x^2 + 1)(x^2 - 1)$

d) $(x + y)^3 - (x - y)^3 - (x^3 - y^3) - (x - y)(x^2 + xy + y^2)$

e) $19(x^3 + y^3) - (3\,x - 2\,y)^3 - (3\,y - 2\,x)^3 - 18\,xy(x + y)$

f) $x^4 + y^4 + (x^2 + y^2 + 2\,xy)^2 - 2(x^2 + y^2 + xy)^2$

g) $(2\,x - 3\,y)^3 - 3\,y(x - 3\,y)^2 - 9\,xy(4\,y - x)$

h) $\left[(x - y)(x + y) + (2\,x - y)^2\right]^3$

i) $(x^3 + x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 + x - 1)$

j) $\left[(x - y)(x - y)\right]^2 - (x^2 + y^2)^2 + 4\,xy\,[(x - y)^2 + xy + 1]$

2.2 Factoriser une expression

2.2.1 Factoriser :

a) $xy + y$

b) $ma + ap$

c) $a^3x^2 - a^2x^3$

d) $4uv - 2uw$

e) $6a^2 + 4ab$

f) $24y^3z^5 - 36yz^2$

g) $2yz^5 + 8y^2z^4 + 6y^3z^3 - 2y^4z^2$

h) $15m^7n^2 - 10m^5n^3$

i) $3a^2bc^2 - abc^3$

j) $(2a + 3b)(2x + y) + (3a + 5b)(2x + y)$

k) $3ab^4c^3 - ab^3c^2$

l) $2u^3v^2 + 8u^3v^3 - 6u^4v$

m) $(x - 3)(x + 1) + 2(x - 3)^2 - (x - 3)$

n) $(u + v)^3 - (u + v)^2$

o) $2a(a - b) - (a - b)^2$

2.2.2 Factoriser :

a) $a^2b^2 - m^2$

b) $x^4 - y^2$

c) $a^2 - \dfrac{1}{16}$

d) $(a + b)^2 - x^2$

e) $(ax + 2y)^2 - (2x - 3y)^2$

f) $(a - b)^2 - 1$

g) $3a^2 - 3$

h) $4x^5y^2 - 9x^3$

i) $a^4 - b^4$

j) $a^5 - a$

k) $\dfrac{u^4}{625} - \dfrac{v^4}{81}$

l) $x^5y^4 - x$

m) $a^2 + 2a + 1$

n) $1 + 2x^2 + x^4$

o) $a^4 + 9b^2 - 6a^2b$

p) $9x^4 + 16y^2 + 24x^2y$

q) $x^2 - x + \dfrac{1}{4}$

r) $\dfrac{xy}{3} + \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{x^2}{4}$

s) $(a + b)^2 - 2(a + b)c + c^2$

t) $5x^2 - 10x + 5$

u) $x^2(a + b) + 2(a + b)x + a + b$

2.2.3 Factoriser :

a) $x^{12} - 125$

b) $a^4 - \dfrac{8ab^3}{27}$

c) $27c^3 + \dfrac{1}{64}$

d) $z^3 + 8a^3b^6$

e) $z^6 + 27$

f) $z^3 - 6z^2 + 12z - 8$

g) $1 + 9a + 27a^2 + 27a^3$

h) $x^3 + x^2y + \dfrac{xy^2}{3} + \dfrac{y^3}{27}$

i) $12a^3 + \dfrac{9ab^2}{4} + \dfrac{3b^3}{16} + 9a^2b$

2.2.4 Factoriser :

a) $x^2 + 5x + 6$

b) $x^2 + 5x + 4$

c) $u^2 - 6u + 8$

d) $x^2 - 2x - 35$

e) $9x^2 + 6x + 1$

f) $4z^2 + 5z + 1$

g) $x^2 - 2x - 80$

h) $3y^2 + 7y + 3$

i) $6x^2 + 5x + 1$

j) $x^2 - 22x + 85$

k) $x^2 + x + 1$

l) $16u^2 - 72u + 81$

m) $40x^2 + 3x - 28$

n) $a^2 + 9a - 10$

o) $2x^2 - 5x - 2$

p) $4m^2 + 25m - 21$

2.2.5 Factoriser :

a) $x^4 - 13x^2 + 36$

b) $a^6 + 19a^3 - 216$

c) $x^8 - 257x^4 + 256$

d) $7x^4 - 61x^2 - 18$

e) $64x^6 - 91x^3 + 27$

f) $6x^4 + 7x^2 - 3$

g) $16x^8 - 641x^4 + 625$

h) $81z^4 + 80z^2 - 1$

2.2.6 Factoriser :

a) $ax + bx + ay + by$

b) $a + b + ax + bx + ay + by$

c) $ax - bx - ay + by$

d) $ax - 4x + 4y - ay$

e) $ax + x - a - 1$

f) $x^3 + x - x^2 - 1$

g) $\dfrac{xy}{2} - \dfrac{x}{4} + \dfrac{yz}{3} - \dfrac{z}{6}$

h) $10xz - 10z - x^2 + x$

i) $a^2 - 2ab + b^2 - 1$

j) $4x^2 + 2x - 9y^2 - 3y$

k) $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$

l) $8y^4 - 8y^3 + y - 1$

m) $x^3 + x - x^2 - 1$

n) $2a^4 - 3 - 2a^3 + 3a$

o) $6x^2 + xy + 18xz + 3yz$

2.2.7 Décomposer en facteurs après avoir groupé.

a) $x - 2\,y - x^2 + 2\,xy + (x - 2\,y)^2$

b) $2\,x^2 + 3\,x - 10\,xy - 15\,y$

c) $3\,x^3 - 20\,y^2z - 5\,z + 12\,x^3y^2$

d) $8\,x + (2\,x + 3\,y)(x - 2\,y) - 6\,x^2 + 12\,y - 9\,xy + (2\,x + 3\,y)^2$

e) $\dfrac{xz}{2} - \dfrac{x}{4} + \dfrac{yz}{3} - \dfrac{y}{6}$

f) $x^5 - \frac{4}{5}\,x^2y - \frac{5}{4}\,x^3z + yz$

g) $\frac{2}{9}\,x^2y^3 - \frac{1}{20}\,x^2 + \frac{40}{27}\,y^3 - \frac{1}{3}$

h) $3\,x^4y^3z + x^4y^3 + 3x^3y^4z - 3\,x^2y^5z - x^2y^5$

i) $x^{3m+2} - 2\,x^{m+2}y^m + x^{2m}y^{m+3} - 2\,y^{2m+3}$ avec $m \in \mathbb{N}^\star$

j) $x^{3m+1} - x^{2m+1}y^{2n} + 2\,x^my^{3n} - 2\,y^{5n}$ avec $m, n \in \mathbb{N}^\star$

2.3 Division euclidienne

2.3.1 Effectuer la division euclidienne de $A(x)$ par $B(x)$ dans chacun des cas suivants et poser l'égalité fondamentale correspondante :

a) $A(x) = x^3 - 8x^2 + 16x - 5$ $B(x) = x - 5$

b) $A(x) = x^5 - x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 3x - 1$ $B(x) = x^2 + 2x - 1$

c) $A(x) = x^4 - 3x^3 + x - 5$ $B(x) = x^2 - 3$

d) $A(x) = 35x^3 + 47x^2 + 13x + 1$ $B(x) = 5x + 1$

e) $A(x) = x^8 + x^4 + 1$ $B(x) = x^2 - x + 1$

f) $A(x) = x^7 - 4x^6 + 2x^5 + x^4 - 3x^2 + 2x - 6$ $B(x) = x^5 - 3$

g) $A(x) = x^8 - x^4 + 1$ $B(x) = 2x^5 + 1$

h) $A(x) = x^5 - 3x^3 + 2x^2 + 5x$ $B(x) = x + 2$

i) $A(x) = \frac{2}{5}x^4 - \frac{3}{4}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x$ $B(x) = -\frac{3}{5}x$

j) $A(x) = 3x + 2x^2 - 5 + x^3$ $B(x) = -1 + x^2 - 2x$

2.3.2 Effectuer la division euclidienne du polynôme $a(x)$ par le polynôme $b(x)$.

a) $a(x) = 3\,x^4 - 7\,x^3 - 18\,x^2 + 28\,x + 24$ et $b(x) = 3\,x^2 + 8\,x + 4$

b) $a(x) = 12\,x^4 + 47\,x^3 + 10\,x^2 + 12$ et $b(x) = -3\,x^2 - 8\,x + 6$

c) $a(x) = x^5 - 3\,x^2 + x + 5$ et $b(x) = -\,x^2 + x - 1$

2.3.3 Par quel polynôme faut-il multiplier $x - 5$ pour obtenir $x^3 - 3\,x^2 - 4\,x - 30$?

2.3.4 Déterminer le polynôme tel que le quotient de sa division euclidienne par $2\,x^2 + 1$ soit $5\,x^2 - 3\,x + 1$ et le reste $1 - x$.

2.3.5 Calculer la valeur numérique $P(a)$ du polynôme $P(x) = 2\,x^3 - 3\,x^2 + 5\,x - 7$ pour chacune des valeurs a suivantes : 1, 3, 0, -2, -3, $1/3$ et $-1/2$.

2.3.6 Effectuer la division euclidienne de $t^5 - 7\,t^4 - t^2 - 9\,t + 9$ par $t^2 - 5\,t + 4$.

2.3.7 Trouver un polynôme P de degré ≤ 2 tel que

$$P(1) = -2 \quad \text{et} \quad P(-2) = 3 \quad \text{et} \quad P(0) = -1$$

2.3.8 Calculer le reste de la division euclidienne du polynôme $a(x)$ par le polynôme $b(x)$.

a) $a(x) = 4\,x^3 - 10\,x^2 + 11\,x - 5$ et $b(x) = x - 1$

b) $a(x) = 9\,x^4 + x^3 - x^2 + x + 2$ et $b(x) = x + 2$

c) $a(x) = 4\,x^3 - 5\,x^2 + 3\,x - 7$ et $b(x) = x$

2.3.9 Déterminer, sans effectuer la division, le reste de la division euclidienne de $A(x)$ par $B(x)$ dans les cas suivants :

a) $A(x) = 2x^3 - x^2 + 5x - 1$ $\quad B(x) = x - 3$

b) $A(x) = x^4 - x + 1$ $\quad B(x) = x + 2$

c) $A(x) = x^3 - 27$ $\quad B(x) = x - 3$

2.3.10 Déterminer les quotients des divisions exactes.

a) $(x^3 - 3\,x^2 + 4) \div [(x - 2)(x + 1)]$

b) $(9\,x^4 + 9\,x^3 - 7\,x^2 - 9\,x - 2) \div [(x + 1)(3\,x + 1)]$

2.3.11 Considérons le polynôme $P(x) = x^4 + 2x^3 - 16x^2 - 2x + 15$. Déterminer s'il est divisible par :

a) $x - 1$ b) $x + 4$ c) $x + \frac{1}{2}$ d) $x + 1$ e) $x + 5$ f) $x - 3$

En déduire une factorisation de $P(x)$.

2.3.12 Trouver les zéros entiers du polynôme

a) $2x^3 - 14x + 12$,

b) $x^4 - 6x^3 + x - 6$.

2.3.13 Déterminer, sans effectuer la division, m et n sachant que :

a) $x^3 + mx + n$ est divisible par $(x - 1)(x + 2)$,

b) $x^3 + mx^2 + n$ est divisible par $x^2 - x - 6$.

2.3.14 Je suis un polynôme de degré 5 et possède les propriétés suivantes :

- je m'annule en 0 et en 2,
- je suis divisible par $x + 2$,
- $x - 3$ apparaît dans ma factorisation,
- le reste de ma division par $x + 3$ est égal à -630,
- mon évaluation en $x = 1$ est égale à 6.

Qui suis-je ?

2.3.15 Factoriser le polynôme :

a) $P(x) = 2x^4 - 3x^3 - 35x^2 - 9x + 45$ sachant que $P(5) = 0$ et $P(-3) = 0$,

b) $P(x) = 2x^4 - 9x^3 + 7x^2 + 6x$ sachant que 2 est une solution de l'équation $P(x) = 0$.

2.3.16 Factoriser le polynôme $p(x) = 2\,x^3 - 8\,x^2 + 8\,x$

2.3.17 Déterminer les solutions entières de l'équation $2x^4 + 11x^3 + 4x^2 - 29x + 12 = 0$.

2.3.18 Factoriser :

a) $x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 6x$ b) $x^5 + 3x^4 - 16x - 48$ c) $6x^4 - 5x^3 - 23x^2 + 20x - 4$

2.3.19 Déterminer le quotient et le reste de la division en utilisant le schéma de Horner.

a) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ par $x - 1$

b) $x^5 + 1$ par $x + 1$

c) $3\,x^5 - 8\,x^4 + 7\,x^3 + x^2 - 5\,x + 6$ par $x + 2$

2.3.20 Monter que $x^6 - 6\,x^5 + 15\,x^4 - 20\,x^3 + 15\,x^2 - 6\,x + 1$ est divisible par $x - 1$.

2.3.21 Calculer le quotient et le reste de la division de $f(x)$ par $g(x)$.

a) $f(x) = 3\,x^3 - x^2 + x + 1 \quad g(x) = 2\,x^2 - 1$

b) $f(x) = 2\,x^3 - 1 \quad g(x) = 3\,x^3 - x^2 + x + 1$

c) $f(x) = 7\,x^5 - x^4 + 6\,x^3 - 7\,x \quad g(x) = 7\,x^3 - x$

d) $f(x) = 6\,x^4 + 4\,x^3 - 7\,x^2 \quad g(x) = 2\,x^2 - 3$

e) $f(x) = 14\,x^4 - 27\,x^3 + 21\,x^2 - 3\,x - 2 \quad g(x) = 2\,x^2 - 3\,x + 2$

f) $f(x) = 14\,x^5 - 36\,x^4 + 23\,x^3 - 11\,x^2 + 18\,x - 8 \quad g(x) = 7\,x^3 - x$

g) $f(x) = 12\,x^5 - 7\,x^4 + 2\,x^2 - 6\,x \quad g(x) = -5\,x^2 + 2\,x - 1$

2.3.22 Le polynôme $p(x) = 2\,x^3 + 3\,x^2 - 11\,x - 6$ possède un zéro compris entre 0 et -5. Décomposer le polynôme $p(x)$ en un produit de facteurs.

2.3.23 Factoriser les polynômes.

a) $x^3 + 9\,x^2 + 11\,x - 21$

b) $x^4 + 2\,x^3 - 16\,x^2 - 2\,x + 15$

c) $x^5 + 3\,x^4 - 16\,x - 48$

d) $x^5 - 3\,x^4 - 21\,x^3 + 43\,x^2 + 96\,x - 180$

2.3.24 Factoriser si possible les polynômes suivants.

a) $p(x) = x^2 + 19\,x + 18$

b) $p(x) = x^2 - 4\,x + 4$

c) $p(x) = 2\,x^2 + 5\,x - 3$

d) $p(x) = 3\,x^2 - 5\,x + 2$

e) $p(x) = 4\,x^2 - 20\,x + 25$

f) $p(x) = x^2 - 9$

g) $p(x) = x^2 - \frac{4}{9}$

h) $p(x) = 9\,x^2 - 5\,x$

i) $p(x) = 8\,x^2 + 6\,x + 1$

j) $p(x) = \frac{1}{3}\,x^2 - x + 4$

2.3.25 Résoudre les équations suivantes par factorisation.

a) $x^3 + 2\,x^2 - x - 2 = 0$

b) $x^3 - 3\,x^2 - 4\,x + 12 = 0$

c) $4\,x^5 - 12\,x^4 + 9\,x^3 = 0$

d) $16\,x^3 - 16\,x^2 - 4\,x + 4 = 0$

2.3.26 Résoudre les équations.

a) $x^4 + 2\,x^3 - 4\,x^2 - 5\,x - 6 = 0$

b) $x^4 - 7\,x^3 + 18\,x^2 - 20\,x + 8 = 0$

c) $35\,x^3 + 47\,x^2 + 13\,x + 1 = 0$

d) $x^3 + 5\,x^2 - 8\,x - 48 = 0$

2.3.27 Factoriser :

a) $x^3 + 2x^2 + x$

b) $2a^6 - 6a^4 + 6a^2 - 2$

c) $9a^3 - ab^2$

d) $54a^6 - 2$

e) $1 - (x - y)^2$

f) $(x^2 - 1)^2 + 4x^2$

g) $(-3x + y)^2 - (4x - z)^2$

h) $x^3 + 9x^2 + 11x - 21$

i) $xy - 9x^3y$

j) $x^4 + 3x^3 - 8x - 24$

k) $2a^3b - a^2b^2 + b^2 - 2ab$

l) $x^3 + 8y^3 + 6x^2y + 12xy^2$

m) $b^3 - a^3$

n) $3x^4 - 18x^3 + 36x^2 - 24x$

o) $8a^4x^3 - 72b^2x^3 - a^4 + 9b^2$

p) $x^3 + 9x - 27 - 3x^2$

q) $d^3 - 8 + 3(d^2 - 4d + 4)$

r) $x^4y^3 + 3x^3y^2 + 3x^2y + x$

s) $z^2x^6 - 5z^2x^4 + 4z^2x^2$

t) $6x^4 + 13x^3 - 13x - 6$

u) $x^3y + 7x^2y + 6xy$

v) $16a^4 + 2ab^3$

w) $8c^3 + 6c + 12c^2 + 1$

x) $(y^2 + b^2)^2 - 4b^2y^2$

2.4 Fractions rationnelles

2.4.1 Rendre les fractions rationnelles irréductibles :

a) $\dfrac{54a^3b^3}{15a^5b^2}$

b) $\dfrac{-16u^2v^2w^3}{-4u^3vw^2}$

c) $\dfrac{x-1}{2x-2}$

d) $\dfrac{2x-2y}{3y-3x}$

e) $\dfrac{a^2-b^2}{(a-b)^2}$

f) $\dfrac{x^2-16}{x^2-5x+4}$

g) $\dfrac{x-x^3}{x^4+2x^3+x^2}$

h) $\dfrac{3z^2-21z+36}{2z^2-12z+18}$

i) $\dfrac{x^3-15x^2+75x-125}{x^2-25}$

j) $\dfrac{x^4-y^4}{x^5-x^3y^2}$

k) $\dfrac{10x^2-10xy}{5x^2y^2-5x^4}$

l) $\dfrac{6x^2+2x}{27x^3+1}$

m) $\dfrac{1-x^2+x^3-x^5}{x+x^2-x^3-x^4}$

n) $\dfrac{x^3+x^2-x-1}{x^3+2x^2-x-2}$

o) $\dfrac{2x^3+9x^2+7x-6}{2x^3+x^2-13x+6}$

2.4.2 Effectuer et réduire :

a) $\dfrac{a+7}{a-1}\cdot\dfrac{a^2-1}{2a+14}$

b) $\dfrac{x+5}{7}\div\dfrac{2x+10}{x-8}$

c) $(x+y)\div\dfrac{x+y}{x-y}$

d) $\dfrac{z^2+z}{z-1}\cdot\dfrac{z-z^2}{z^3}$

e) $\dfrac{x+2}{2x-3}\div\dfrac{x^2-4}{2x^2-3x}$

f) $\dfrac{9x^2-4}{3x^2-5x+2}\cdot\dfrac{9x^4-6x^3+4x^2}{27x^4+8x}$

g) $\dfrac{x^2-6x+9}{x^2-1}\cdot\dfrac{2x-2}{x-3}$

h) $\dfrac{6x^2-5x-6}{x^2-4}\div\dfrac{2x^2-3x}{x+2}$

i) $\dfrac{5u^2+12u+4}{u^4-16}\cdot\dfrac{u^2-2u}{25u^2+20u+4}$

2.4.3 Effectuer et réduire :

a) $\dfrac{x}{x+3}+\dfrac{x+6}{x+3}$

b) $\dfrac{x}{x+3}-\dfrac{x+6}{x+3}$

c) $\dfrac{6}{x^2-4}-\dfrac{3x}{x^2-4}$

d) $\dfrac{2}{3x+1}+\dfrac{9}{(3x+1)^2}$

e) $\dfrac{5}{a}-\dfrac{2a-1}{a^2}+\dfrac{a+5}{a^3}$

f) $\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2x}{x^2-1}$

g) $\dfrac{x-3}{x+3}-\dfrac{2x}{x^2+5x+6}$

h) $\dfrac{1}{m}-\dfrac{m}{m^2-1}-\dfrac{2m+1}{m-m^3}$

i) $\dfrac{2y+1}{y^2+4y+4}-\dfrac{6y}{y^2-4}+\dfrac{3}{y-2}$

j) $\dfrac{13-5x}{6x^2-6}+\dfrac{3x}{x+1}-\dfrac{3x-5}{3x-3}$

2.4.4 Effectuer et réduire :

a) $\dfrac{x}{x+y}+\dfrac{y}{x-y}-\dfrac{2\,xy}{x^2-y^2}$

b) $\dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{x-2\,y}{x+y}+\dfrac{x^2+3\,y^2}{y^2-x^2}$

c) $\dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{x^2-1}-\dfrac{2\,x+1}{x-x^3}$

d) $\dfrac{4}{x^2-y^2}+\dfrac{3\,y}{x^2y-x^3}-\dfrac{x-3\,y}{x^3-xy^2}$

e) $\dfrac{x^3-y^3}{x^2-y^2}-\dfrac{x^2y+xy^2}{x^2+xy}$

f) $\dfrac{x-3}{x+3}-\dfrac{4\,x-6\,y}{xy+3\,y+2\,x+6}+\dfrac{y+6}{y+2}$

g) $\dfrac{x+2}{x^2+7\,x+10}-\dfrac{x-3}{x^2-8\,x+15}+\dfrac{x^2-15}{x^2-25}$

h) $\dfrac{2\,x^2-x-7}{x^4-5\,x^2+4}-\dfrac{x-3}{x^3-2\,x^2-x+2}$

2.4.5 Effectuer et réduire :

a) $\left(\dfrac{z+2}{z}-\dfrac{2}{z^2+z}\right)\left(\dfrac{1}{z}+1\right)$

b) $\left[\left(x+\dfrac{2x}{x-2}\right)\left(\dfrac{2x}{x-2}-2\right)\right]\div\dfrac{4x^2}{x^2-4}$

c) $\left(\dfrac{1}{u}-\dfrac{2}{u^2}-\dfrac{3}{u^3}\right)\div\left(\dfrac{1}{u^2}-1\right)$

d) $\dfrac{2x-1}{x+y}\cdot\dfrac{x^2-y^2}{4x^2-1}\cdot\left(1-\dfrac{2x}{2x-1}+\dfrac{1}{2x+1}\right)$

2.5 Equations et systèmes d'équations

2.5.1 Résoudre les équations ci-dessous :

a) $4\,(x-3)+x\,(x-5)-30=0$

b) $(x+1)(x+2)+(x+3)(x+4)=42$

c) $(x-2)(x-4)+(x+3)(x-1)=39$

d) $(x-6)(x+1)+(2\,x+3)(x-5)=0$

e) $(3\,x-5)^2-12x=1$

f) $x-7=6-(x-7)^2$

g) $(5\,x-1)^2+x^2+3=0$

h) $2\,(3\,x+1)^2-32\,(3\,x+1)+126=0$

i) $(x+1)^2-(x-1)^2=(x-8)^2$

j) $(4\,x+1)^2-(3\,x+1)^2=(2\,x+1)^2$

k) $(x+3)^3-(x-4)^3=721$

l) $(x-5)^3-(x+2)^3+91=0$

m) $(2\,x+1)^2-(x-1)(x+11)=(3\,x-2)^2-(3\,x-4)^2$

n) $(x+5)^2-(2\,x-1)(3\,x+5)=(x+3)^2-(x+1)^2$

o) $(4\,x-3)(2\,x-1)-(3\,x+5)^2=(2\,x+3)^2-(4\,x-1)(2\,x+7)-73$

2.5.2 Résoudre l'équation $2\,x^2+7\,x-15=0$. Puis factoriser le polynôme $2\,x^2+7\,x-15$. Factoriser les polynômes ci-dessous d'une manière analogue.

a) $2\,x^2-7\,x-4$

b) $6\,x^2+11\,x+4$

c) $6\,x^2-25\,x-25$

d) $6\,x^2-20\,x+25$

e) $12\,x^2+23\,x-24$

f) $5\,x^2+\frac{29}{3}\,x-\frac{14}{3}$

2.5.3 Résoudre les équations.

a) $x^2-9=0$

b) $4\,x^2-1=0$

c) $(x-2)^2-9\,(x-2)=0$

d) $(x^2-x-6)(x+5)=0$

e) $x^4-5\,x^2+4=0$

f) $(x-1)(x^2+1)=0$

g) $x^3+x^2=4\,x+4$

h) $x^2-9-4\,(x-3)=0$

i) $(x+6)^2-3\,(x+6)+2=0$

j) $x^3+2\,x^2-x-2=0$

2.5.4 Résoudre les équations.

a) $(x^2-8\,x+12)(x+2)^3=0$

b) $(x-3)(x^2-4)=0$

c) $x^3+2\,x^2-4\,x=8$

d) $(2\,x^2+3\,x+1)^2-(2\,x^2-4\,x-1)^2=0$

e) $x\,(x-2)+(x-3)(x-2)=0$

f) $6\,x^2=3\,x^3-72\,x$

g) $x^3+3\,x^2=9\,x+27$

h) $(x-1)(x-2)(x-3)=x\,(x^2-9)$

2.5.5 Résoudre l'équation $(x^2-2)^2-5\,(x^2-2)-14=0$

2.5.6 Résoudre les équations suivantes.

a) $x^4-13\,x^2+36=0$

b) $x^4-1=0$

c) $x^4+2\,x^2+1=0$

d) $x^6-7\,x^3-8=0$

e) $(x^2-1)^2-2\,(x^2-1)+1=0$

f) $\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x}-3=0$

g) $(x^2-5\,x+6)^2-2\,(x^2-5\,x+6)=0$

2.5.7 Résoudre les équations.

a) $\dfrac{x-8}{5}+\dfrac{x^2}{3}=1$

b) $\dfrac{3\,x-7}{5}+\dfrac{x^2-9}{7}=2$

c) $\dfrac{1-8\,x}{2}-\dfrac{x^2-7}{4}+2\,x=0$

d) $\dfrac{x^2-3}{2}-\dfrac{x^2+1}{3}=\dfrac{x^2-11}{6}$

e) $\dfrac{3\,x+1}{8}-\dfrac{x^2+5}{4}=\dfrac{55}{2}$

f) $\dfrac{(x-2)^2}{5}-\dfrac{(x-3)^2}{4}=0$

g) $\dfrac{2\,x^2}{3}+\dfrac{7}{2}=\dfrac{x}{2}+8$

h) $x=\dfrac{2}{5}+\dfrac{5\,x^2}{16}$

i) $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{4\,x}{5}-19=\dfrac{76}{5}$

j) $\dfrac{5-4\,x}{2}+\dfrac{3\,x^2-1}{3}=\dfrac{2\,x^2+5}{6}$

k) $\dfrac{x^2+5}{8} = \dfrac{2\,(3-x)}{5} - \dfrac{3\,(x-1)}{10}$

l) $\dfrac{x^2-10}{9} - \dfrac{3\,(4-x)}{4} = \dfrac{2\,(x-3)}{3}$

2.5.8 Résoudre les équations suivantes.

a) $\frac{1}{4}\,x + \frac{2}{5} = \frac{1}{5}\,x - \frac{3}{4}$

b) $3\,x + 8 = 2\,(x+4)$

c) $2\,x + 5 = \frac{1}{2}\,(7 - 4\,x)$

d) $\frac{1}{2}\,(8 + 2\,x) = x + 4$

e) $\dfrac{t-5}{3} = \dfrac{2-t}{2}$

f) $3\,x - \dfrac{4-x}{2} = x - \frac{1}{3}$

2.5.9 Résoudre (sans formule) les équations ci-dessous.

a) $x^2 - 9 = 0$

b) $x^2 + 5\,x = 0$

c) $(x-3)^2 = 0$

d) $(x-3)^2 - 4 = 0$

e) $4\,(x+5)^2 - 9 = 0$

f) $4\,(x+5)^2 + 9 = 0$

g) $(x-p)^2 - q = 0$

h) $x^2 + 6\,x + 9 - 4 = 0$

i) $x^2 + 6\,x + 5 = 0$

j) $x^2 + 5\,x + 4 = 0$

k) $2\,x^2 + 10\,x + 8 = 0$

l) $a\,x^2 + b\,x + c = 0$

2.5.10 Résoudre les équations suivantes.

a) $x^2 - 3\,x + 2 = 0$

b) $x^2 - 5\,x + 4 = 0$

c) $x^2 - 4\,x + 5 = 0$

d) $x^2 + 6\,x + 9 = 0$

e) $-x^2 + 30\,x - 209 = 0$

f) $2\,x^2 - 5\,x - 2 = 0$

g) $-\frac{1}{2}\,x^2 + x + 6 = 0$

h) $2\,x^2 = x + 6$

2.5.11 Résoudre les équations suivantes après avoir déterminé leur ensemble de définition.

a) $\dfrac{x-1}{2\,x-1} = \dfrac{3\,x-5}{4\,x-2}$

b) $\dfrac{x^2+x+1}{2\,x+2} = x$

c) $\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x+3} + \dfrac{3}{4} = 0$

d) $\dfrac{x}{x-1} = \dfrac{3\,x-4}{(x-1)\cdot(x-2)}$

e) $\dfrac{750}{x}+6=\dfrac{720}{x-5}$

f) $\dfrac{x}{x-6}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{x}{6}+\dfrac{x+6}{6-x}$

2.5.12 Résoudre les équations ci-dessous :

a) $\dfrac{x-4}{x+8}=0$

b) $\dfrac{g^2-5g}{g^2-8g+15}=0$

c) $\dfrac{2x^3-8x^2-10x}{x-5}=5x$

d) $\dfrac{x+1}{x}-2x=\dfrac{x-1}{x}$

e) $\dfrac{z}{z-3}-\dfrac{2}{2-z}=\dfrac{3}{z^2-5z+6}$

f) $\dfrac{4x}{x+3}-\dfrac{x}{x-3}=-\dfrac{12}{x^2-9}$

g) $\dfrac{t}{t-2}-\dfrac{2}{t+2}=\dfrac{8}{t^2-4}$

h) $\dfrac{x+4}{x}-\dfrac{1}{x+4}=\dfrac{4}{x^2+4x}$

i) $\dfrac{1}{x^2-x}+\dfrac{5}{x^2+x}=\dfrac{4}{x^2-1}$

j) $\dfrac{x+3}{3\,x-1}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{2\,x-9}{4-12\,x}+1$

2.5.13 Résoudre les équations ci-dessous :

a) $1=\dfrac{3\,x}{x^2-9}-\dfrac{x}{2\,x-6}$

b) $\dfrac{x}{x+3}=\dfrac{x-1}{2\,x}+\dfrac{1}{4}$

c) $\dfrac{2-x}{x+1}-\dfrac{5}{3}=\dfrac{2\,x+1}{3-2\,x}$

d) $\dfrac{10\,x-2}{6\,x-3}+\dfrac{3\,x+5}{4\,x^2-1}=\dfrac{x-1}{2\,x+1}$

e) $\dfrac{x-1}{x^2+x-6}+\dfrac{2\,x+1}{x^2-5\,x+6}+\dfrac{x+5}{x^2-9}=0$

f) $\dfrac{x-3}{x^2-3\,x+2}-\dfrac{x-1}{x^2-5\,x+6}+\dfrac{x-2}{x^2-4\,x+3}=0$

2.5.14 Résoudre les équations suivantes.

a) $\sqrt{7-x}=x-5$

b) $x=4+\sqrt{4\,x-19}$

c) $\sqrt{x+1}-x=x+2$

d) $x-\sqrt{-7\,x-24}=-2$

e) $\sqrt{7-2\,x}-\sqrt{5+x}=\sqrt{4+3\,x}$

f) $\sqrt{11+8\,x}+1=\sqrt{9+4\,x}$

g) $x+\sqrt{x}=20$

h) $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{x}}{\sqrt{3}-\sqrt{x}}=3$

i) $\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}=\sqrt{2\,x+3}+\sqrt{2\,x-3}$

j) $\sqrt{3\,x-5}-\sqrt{x-1}=\sqrt{4\,x-5}-\sqrt{2\,x-1}$

2.5.15 Résoudre les équations suivantes.

a) $3\sqrt{2x-3}+2\sqrt{7-x}=11$

b) $\sqrt{2\sqrt{x+1}}=\sqrt{3x-5}$

2.5.16 Résoudre les équations suivantes.

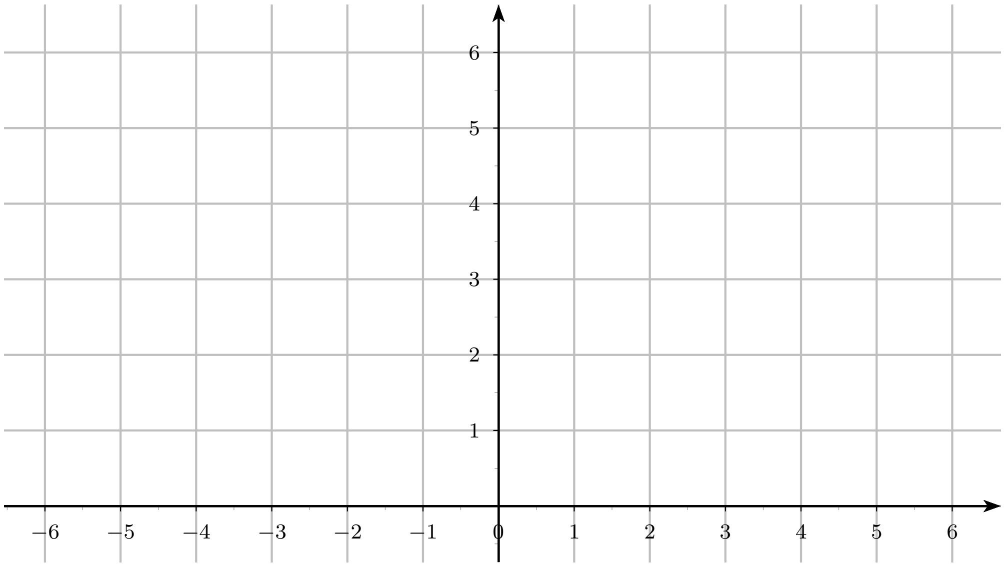
a) $\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}=3$

b) $3x^2-5x-4\sqrt{3x^2-5x+4}=-8$

2.5.17 Soit la fonction valeur absolue $f\colon \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}_+$,

$$f(x)=|x|.$$

a) Dans le système d'axes ci-dessous, placer une quinzaine de points qui sont sur le graphe de f.



b) Donner l'image par f de l'ensemble

$$A=\{-100;-45;-10;-9;-3;0;1;2;3;5;36;183\}$$

c) Esquisser le graphe de la fonction

$$g(x)=|x+2|$$

d) Donner l'image par la fonction

$$h(x)=|2x-5|$$

de l'ensemble

$$B=\{-1;0;1;2;3;4;5\}$$

2.5.18 Résoudre les équations suivantes.

a) $|x+4| = 11$

b) $3\,|x-2| + 3 = 7$

c) $4 - |x+2| = 3\,(|x-1| - 1)$

d) $|2\,x+3| - |2-x| = -3$

2.5.19 Résoudre les systèmes d'équations :

a) $\begin{cases} x+y &= 1 \\ x-y &= 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5\,x-2\,y &= 5 \\ 3\,x-y &= 10 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 6\,x+4 &= -6\,y \\ 1-x &= 6\,y \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2\,x-4\,y &= 2 \\ x-2\,y &= 1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2\,x+4\,y &= 5 \\ x+2\,y &= 2 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2\,x+3\,y &= 4 \\ 5\,x+6\,y &= 10 \end{cases}$

2.5.20 Pour quelle(s) valeur(s) de m le système suivant admet-il exactement une solution ?

$$\begin{cases} 2\,x+5\,y &= 32 \\ x+y &= 10 \\ 7\,x-3\,y &= m \end{cases}$$

2.5.21 Résoudre les systèmes linéaires ci-dessous :

a) $\begin{cases} 12\,x-5\,y = 29 \\ 4\,x-3\,y = 11 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+y = 19 \\ 2\,x-3\,y = 11 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 12\,x+11\,y = 6 \\ 3\,y-2\,x = 24 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 72\,x+14\,y = 330 \\ 63\,x+7\,y = 273 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2\,x+3\,y = 4 \\ 3\,y+10\,x = 40 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 21\,x+8\,y+66 = 0 \\ 28\,x-23\,y-13 = 0 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 2\,x+3\,y+2\,z = 41 \\ 8\,x+5\,y = 31 \\ 7\,y = 21 \end{cases}$

h) $\begin{cases} 2\,x-3\,y+2\,z = 41 \\ 5\,x+3\,y = 10-z \\ 9\,x = 27 \end{cases}$

i) $\begin{cases} 7\,x-4\,y-5\,z = 56 \\ 3\,y-2\,z = 13 \\ 5\,x-3\,y = 22 \end{cases}$

j) $\begin{cases} x+y+z = 25 \\ x-y+z = 5 \\ x+2\,z = 2\,y-10 \end{cases}$

k) $\begin{cases} x-y-z = 6 \\ x-2\,y-3\,z = 10 \\ 5\,x+6\,y+z = 2 \end{cases}$

l) $\begin{cases} 3z-2y-x=17 \\ 2y+3z-2x=36 \\ 5x+2y-z=10 \end{cases}$

m) $\begin{cases} 3x-y+z=29 \\ x+3y+30z=6 \\ x-y+z=17 \end{cases}$

n) $\begin{cases} 2x+3y+4z=47 \\ 3x+5y-4z=2 \\ 4x+7y-2z=31 \end{cases}$

o) $\begin{cases} 2x+y-z=1 \\ x+2y+z=8 \\ 3x-y+2z=7 \end{cases}$

p) $\begin{cases} x+2y-3z=0 \\ 5x-3y+z=0 \end{cases}$

q) $\begin{cases} 2x-y+3z=4 \\ 3x+4y-z=-5 \\ x+5y-4z=-9 \end{cases}$

r) $\begin{cases} x-y+z=0 \\ -x+y+z=10 \\ x+y-z=2 \end{cases}$

s) $\begin{cases} x+2y+3z=9 \\ x-y+4z=15 \\ -x+7y-6z=-27 \end{cases}$

t) $\begin{cases} x+y+z=9 \\ x+2y+3z=14 \\ 3x+2y+z=22 \end{cases}$

u) $\begin{cases} 3x+4y-z=-3 \\ 2x+y-z=-1 \\ x+2y+z=1 \\ x+y-3z=-6 \end{cases}$

v) $\begin{cases} 2x+y+3z=3 \\ 3x-y+4z=2 \\ 4x+y-z=5 \\ x+y+z=4 \end{cases}$

w) $\begin{cases} x+y+2z=4 \\ 3x-y+z=3 \end{cases}$

x) $\begin{cases} x-3y+z-t=0 \\ 2x+y-z+2t=0 \end{cases}$

y) $\begin{cases} x+5y+4z-13t=3 \\ 3x-y+2z+5t=2 \\ 2x+2y+3z-4t=1 \end{cases}$

z) $\begin{cases} x+y+z+t+u=1 \\ x+2y+z+t+u=0 \\ x+y+3z+t+u=3 \\ x+y+z+4t+u=-2 \\ x+y+z+t+5u=5 \end{cases}$

2.5.22 Résoudre les systèmes suivants :

a) $\begin{cases} 2xy-3y=3 \\ y^2-4xy=-15 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}=\dfrac{5}{6} \\ x+y=30 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{11}{10} \\ x+y=11 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^2+y^2=34 \\ xy-(x+y)=-13 \end{cases}$

e) $\begin{cases} \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=2 \\ xy+1=0 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x^2y^2-xy=30 \\ x^2-y^2=5 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x^2+y^2-5xy=15 \\ x+y+3xy=-7 \end{cases}$

h) $\begin{cases} x+y=9 \\ x^2-y^2=9 \end{cases}$

2.5.23 Résoudre les systèmes suivants :

a) $\begin{cases} (2\,x-y)^2 - 4\,(2\,x-y) = 5 \\ x^2 - y^2 = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y+3\sqrt{x+y} = 18 \\ x-y-2\sqrt{x-y} = 15 \end{cases}$

2.6 Equations paramétriques

2.6.1 Soit la famille d'équations paramétriques donnée par

$$\frac{(m-1)\,x}{m} = 3 \qquad \text{où} \quad m \in \mathbb{R}^\star$$

a) Résoudre cette équation lorsque $m = 2$.
b) Résoudre cette équation lorsque $m = -2$.
c) Résoudre cette équation lorsque $m = \frac{3}{2}$.
d) Résoudre cette équation lorsque $m = 1$.
e) Résoudre cette équation et donner la solution en fonction du paramètre m.

2.6.2 Résoudre les équations en x suivantes.

a) $(a-1)\,x = a+1$
b) $n\,x - x = n^2 - 1$
c) $m\,x - 4\,x = m^2 - 16$
d) $a^2\,x - a = x - 1$
e) $(b^2+1)\,x = b^2 - 1$
f) $4\,a^2x - 1 = x + 2\,a$
g) $2\,ax + 1 = 4\,a^2 + x$
h) $(a+b)\,x = 4\,b - (b-a)\,x$
i) $(2-a+b)\,x = b\,(x-2) + 2\,(x+b-3)$

2.6.3 Résoudre les équations en x suivantes en définissant le domaine de variation V du paramètre.

a) $\dfrac{1}{m} - x = \dfrac{x}{m} + m$
b) $\dfrac{x-2\,a}{a-1} + \dfrac{x}{a-a^2} = \dfrac{1-2\,a}{a}$
c) $\dfrac{x}{n-1} + \dfrac{x}{n+1} = \dfrac{1}{n^2-1}$
d) $x - 1 - \dfrac{x}{b+1} = \dfrac{1}{b-1}$
e) $\dfrac{x-m-4}{3\,m} + \dfrac{x+m}{m} = \dfrac{x+1}{3}$
f) $\dfrac{x-y}{2\,y} - 1 = \dfrac{y-2\,x}{3\,y} + \dfrac{x}{6}$
g) $\dfrac{x+2}{y} - \dfrac{1-xy}{y^2} = x$
h) $\dfrac{x-2}{z-1} + \dfrac{2\,x}{z+1} = 3$
i) $\dfrac{x+1}{a-1} - \dfrac{x-1}{a} = \dfrac{ax-1}{a^2-a}$
j) $\frac{x+1}{b^2-3\,b+2} + \frac{2\,b(3-b)}{(b-2)(b^2-1)} = \frac{x-1}{b^2-b-2}$
k) $\dfrac{x+a}{a-5} - \dfrac{a-x}{a} = \dfrac{x-a}{a+5} - \dfrac{2\,a}{5-a}$
l) $\dfrac{x-a}{a+1} - \dfrac{x+a}{a} = \dfrac{1-x}{1-a} - 3$

2.6.4 Quelles valeurs doit prendre m pour que l'équation

$$(m+4)\,x^2 - 2\,(m-2)\,x + m - 4 = 0$$

admette :

a) deux racines distinctes ;

b) une racine nulle ;

c) deux racines opposées ;

d) deux racines inverses.

2.6.5 Déterminer m dans l'équation $x^2 - 5\,x + m = 0$ pour que :

a) $x' = \dfrac{1}{x''}$

b) $x' - x'' = 3$

c) $x' = 2\,x''$

d) $2\,x' - x'' = 7$

2.6.6 Déterminer m dans l'équation $8\,x^2 - (m-1)\,x + m - 7 = 0$ pour que :

a) $x' = x''$

b) $x' = -x''$

c) $x' = \dfrac{1}{x''}$

d) $x' = -\dfrac{1}{x''}$

2.6.7 Déterminer p dans l'équation $x^2 - p\,x + 36 = 0$ pour que :

a) $x' = x''$

b) $x' = -x''$

c) $x'^2 + x''^2 = 184$

d) $\dfrac{1}{x'} + \dfrac{1}{x''} = \dfrac{5}{12}$

2.6.8 Soit l'équation $x^2 - (m-2)\,x + (2\,m-7) = 0$ avec $m \in \mathbb{R}$.
Sans calculer ses solutions, déterminer pour quelle(s) valeur(s) du paramètre m elle a :

a) deux solutions opposées,

b) deux solutions distinctes strictement positives,

c) une solution unique.

2.6.9 Soit l'équation $x^2 - 2\,(m-2)\,x + (2\,m-5) = 0$ avec $m \in \mathbb{R}$.
Sans calculer ses solutions, déterminer pour quelle(s) valeur(s) du paramètre m elle a :

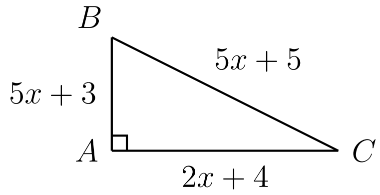
a) deux solutions opposées,

b) deux solutions distinctes strictement positives,

c) une solution négative.

2.7 Problèmes

2.7.1 On considère le triangle ABC rectangle en A dont les dimensions sont données sur la figure en fonction de x.



Quelles sont les dimensions possibles pour le triangle ABC ?

2.7.2 Trouver deux nombres positifs tels que la somme de leurs carrés soit 180 et la différence de leurs carrés 108.

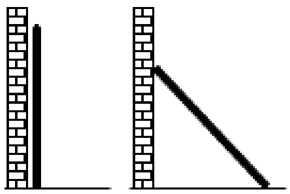
2.7.3

a) La longueur du côté d'un carré est x en cm. L'aire de ce carré augmente de 11 cm^2 si x augmente de 1 cm. Calculer x.

b) L'aire d'un carré augmente de 147 cm^2 si l'on double la longueur x de chacun de ses côtés. Déterminer x.

2.7.4

Un roseau est placé verticalement contre un mur. Si on écarte le pied de ce roseau de 45 cm du bas du mur, son sommet glisse de 15 cm vers le bas. Quelle est la longueur de ce roseau ?



2.7.5

a) On dit qu'un rectangle est de format A si, lorsqu'il est coupé en deux rectangles égaux, ces derniers sont semblables au premier (préservation du rapport des côtés).
Déterminer le rapport entre la longueur et la largeur d'un rectangle de format A.

b) Une feuille de papier A0 est une feuille de format A dont la surface mesure 1 m^2. En coupant cette feuille en deux, on obtient deux feuilles A1 ; en coupant en deux une feuille A1, on obtient deux feuilles A2 et ainsi de suite.
Déterminer, en millimètres, la longueur et la largeur d'une feuille de format A4.

2.7.6

Lorsqu'on lâche une pierre du haut d'une falaise, elle parcourt approximativement $4.9\,t^2$ mètres en t secondes. On entend l'impact 4 secondes plus tard. Sachant que la vitesse du son est d'environ 330 m/s, estimer la hauteur de la falaise.

2.7.7

La vitesse v (en mètres par seconde) d'un objet en chute libre est donnée par la fonction $v(t) = 9.8 \cdot t + v_0$ où v_0 est la vitesse initiale et t le temps (en secondes).

a) Exprimer le temps en fonction de la vitesse

b) Quelle est la vitesse de l'objet en $t = 4$ s sachant qu'au temps $t = 2$ s sa vitesse initiale était de 21 m/s ?

2.7.8

Une personne échange des pièces de 2 francs contre des pièces de 5 francs. Pour la même somme, elle a alors 102 pièces de moins qu'auparavant. Quelle est cette somme ?

2.7.9

Une bouteille et son bouchon coûtent 105 francs. La bouteille coûte 100 francs de plus que le bouchon. Quel est le prix du bouchon ? Quel est le prix de la bouteille ?

2.7.10

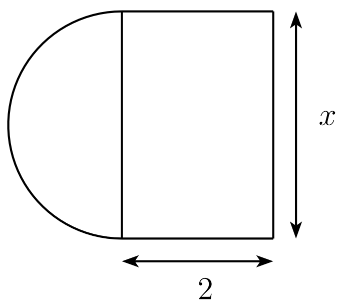
La relation entre la température c sur l'échelle Celsius et la température f sur l'échelle Fahrenheit est donnée par $c = \frac{5}{9} \cdot (f - 32)$.

a) Donner la température qui s'exprime par le même nombre dans les deux échelles.

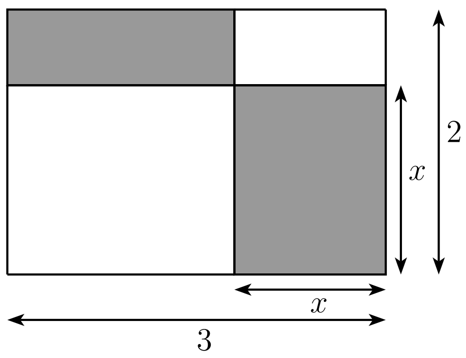
b) Pour quelle température le nombre lu sur l'échelle de Fahrenheit est-il le double du nombre lu sur l'échelle de Celsius ?

2.7.11

Pour quelles valeurs de x l'aire du rectangle est-elle plus grande que celle du demi-disque.



2.7.12
Pour quelle valeur de x le carré et le rectangle grisés ont-ils la même aire ?



2.7.13
On veut construire une boîte sans couvercle à partir d'une feuille rectangulaire de 20 cm sur 30 cm en découpant de chaque coin un carré d'aire x^2, et en relevant les côtés.
Montrer qu'il y a deux façons de construire une telle boîte d'un volume de 1 000 cm^3.

2.7.14
Jean dit à Pierre : "Donne-moi cinq de tes billes et nous en aurons autant l'un que l'autre".
Celui-ci répond : "Donne m'en dix des tiennes et j'en aurai le double de ce qu'il te restera".
Combien chacun avait-il de billes ?

2.7.15
La somme des chiffres d'un nombre entier de trois chiffres est 18. Si l'on permute le premier chiffre(depuis la gauche) et le deuxième, le nombre augmente de 180. Si l'on permute le deuxième et le troisième chiffre, le nombre augmente de 18.
Quel est ce nombre ?

2.7.16
Un téléphérique pratique les tarifs suivants : montée CHF 22.50, descente CHF 15.-, aller-retour CHF 30.-. Pendant une journée, on a encaissé CHF 19650.- pour 680 montées et 520 descentes.
Combien de billets de chaque sorte ont-ils été vendus ?

2.7.17
Un capital de CHF 330740.- est divisé en trois parts placées à 4%, 5% et 6%. Après une année, on ajoute les intérêts à chaque part et on remarque qu'on obtient trois fois la même somme.
Quelles étaient les parts initiales ?

2.7.18
Un libraire détient un certain stock d'un ouvrage. S'il vendait chaque exemplaire à 8 francs, il ferait un bénéfice de 90 francs. Mais, obligé de liquider le stock à moitié prix, il perd au contraire 90 francs.
Combien d'exemplaires de cet ouvrage détient-il ?

2.7.19
Un jardin rectangulaire a pour dimensions 30 m sur 20 m. Une allée de largeur uniforme fait le tour à l'intérieur.
Quelle doit être cette largueur pour que la surface de l'allée soit les $\frac{3}{8}$ de celle du rectangle entier ?

2.7.20
Les diagonales d'un losange diffèrent de 5 cm. Si l'on augmente la petite diagonale de 2 cm et que l'on diminue la grande de 3 cm, son aire diminue de 4 cm^2.
Que mesurent les diagonales de ce losange ?

2.7.21
Le périmètre d'un triangle rectangle mesure 110 m et l'un des côtés de son angle droit, 10 m.
Quelles sont les mesures des deux autres côtés de ce triangle ?

2.7.22
L'aire d'un champ rectangulaire est 31280 m^2. Si l'on augmentait chacune de ses dimensions de 1 m, l'aire serait augmentée de 472 m^2.
Quelles sont les deux dimensions ?

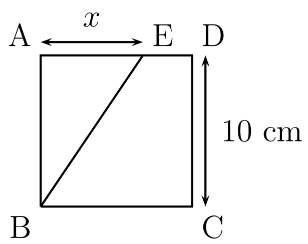
2.7.23
Deux réservoirs de forme cubique ont une capacité totale de 1853 l. La somme de leurs hauteurs est 1.7 m.
Combien mesure le côté de chacun d'eux ?

2.7.24 On s'attend à ce que la population P (en milliers) d'une petite ville croisse selon la formule

$$P = 15 + \sqrt{3\,t + 2}$$

où t est le temps en années. Quand la ville atteindra-t-elle 20'000 habitants ?

2.7.25

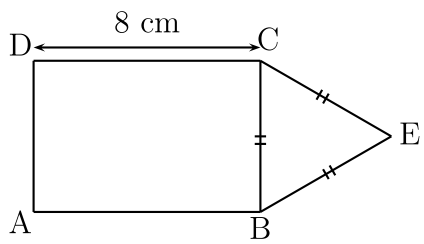


$ABCD$ est un carré et E est un point sur le segment AD. On note x, la longueur AE, exprimée en centimètres.

a) Exprimer, en fonction de x, l'aire du triangle ABE.

b) Quelle valeur faut-il donner à x pour que l'aire du triangle soit égale au quart de l'aire du carré ?

2.7.26



$ABCD$ est un rectangle.
Quelle doit-être la longueur du côté du triangle équilatéral pour que le rectangle et le triangle aient le même périmètre ?

2.8 Solutions des exercices

Développer une expression

2.1.1

a) $3 + xz + y^2$

b) $3 - xz - y^2$

c) $3xz + 3y^2$

d) $5a$

e) $-a + 2b - 2c$

f) $6a^2 - b^2 - c^2 + ab - ac + 2bc$

g) $-3x^3 - 2x^2 - 6$

h) $5x^3 - 2x^2 - 4$

i) $-4x^6 + 8x^5 + 19x^3 + 2x^2 + 5$

j) $\dfrac{21u - 7v}{12}$

k) $\dfrac{3u + 13v}{12}$

l) $\dfrac{36u^2 - 31uv - 10v^2}{48}$

2.1.2

a) $a^2 + 2ab + b^2$

b) $a^2 - 2ab + b^2$

c) $a^2 - b^2$

d) $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

e) $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

f) $a^3 - b^3$

g) $a^3 + b^3$

2.1.3

a) $a^2 + 16a + 64$

b) $y^{12} - 9y^8b + 27y^4b^2 - 27b^3$

c) $u^2 - 9$

d) $8m^3 - 125n^3$

e) $49 - 14f + f^2$

f) $64 + 96z^2 + 48z^4 + 8z^6$

g) $27 + y^9$

h) $x^4 - y^4$

i) $t^3 + 9t^2u^5 + 27tu^{10} + 27u^{15}$

j) $4x^2 - 28x + 49$

k) $b^6 - c^9$

l) $a^3 - 9a^2b + 27ab^2 - 27b^3$

2.1.4

a) $x^2 - y^2 - 2\,x - 2\,y$

b) $4\,x$

c) $x\,y$

d) $4\,y^2$

e) $-x^2 - 6\,x\,y - 14\,y^2$

f) $-2\,x^2 - 2\,x$

g) x^2
h) $4\,x^2\,y^2 - 20\,y^4$
i) 0
j) 0

2.1.5

a) $-36\,a^2b^4 + 49\,x^6$
b) $-57\,x^2y^3 + 12\,x^4 + 49\,y^6 + 5\,y^5 + 20\,x^2y^2$
c) $-19\,x^2 - 26\,xy - 31\,y^2$
d) $8\,a^3 - 36\,a^2b + 54\,ab^2 - 4\,a^2 - 27\,b^3 + 12\,ab - 9\,b^2 - 2\,a + 3\,b$

2.1.6

a) $r(x) = 5\,x^3 - x^2 + x + 1$
b) $s(x) = 6\,x^6 + \cdots + 1\,x^4 + \cdots$

2.1.7

a) $p + q = x^3 + x^2 - x + 2$
b) $p - q = -x^3 + x^2 + 3\,x + 2$
c) $p \cdot q = x^5 + x^4 - 2\,x^2 - 4\,x$

2.1.8

a) $9\,x^4 - 24\,x^3 + 34\,x^2 - 24\,x + 9$
b) $x^4 + x^2 + x - 1$
c) 7
d) 2
e) 6
Remarque $p \cdot q = 2\,x^7 + x^6 - 15\,x^5 + 6\,x^4 + 92\,x^3 - 67\,x^2 - 157\,x + 306$

2.1.9

a) $-z$
b) $xy^2 + y^3$
c) $7\,x^3 - 2\,xy^2$
d) $5\,xy + \frac{15}{8}\,x^2y - \frac{3}{2}\,y^2$
e) $\frac{7}{12}\,x^6 - 17\,x^4 - x^2y^2$
f) $24\,x^4 - 2\,x^3 + 5\,x^2 + 7\,x - 6$
g) $x^4 + 2\,x^3 - 41\,x^2 - 42\,x + 360$
h) $6\,x^2 - 10\,x$
i) $x^3 + y^3$
j) $2\,x^2y - 4\,xy^2$

2.1.10

a) $4\,x-4$

b) $5\,x^2-13\,x+9$

c) $6\,x^2+2$

d) $-2\,x^3+6\,x^2y+4\,y^3$

e) 0

f) 0

g) $8\,x^3-30\,x^2y+36\,xy^2-54\,y^3$

h) $125\,x^6-300\,x^5y+240\,x^4y^2-64\,x^3y^3$

i) $x^6+x^4-x^2-1$

j) $4\,xy$

Factoriser une expression

2.2.1

a) $y(x+1)$

b) $a(m+p)$

c) $a^2x^2(a-x)$

d) $2u(2v-w)$

e) $2a(3a+2b)$

f) $12yz^2(2y^2z^3-3)$

g) $2yz^2(z^3+4yz^2+3y^2z-y^3)$

h) $5m^5n^2(3m^2-2n)$

i) $abc^2(3a-c)$

j) $(2x+y)(5a+8b)$

k) $ab^3c^2(3bc-1)$

l) $2u^3v(v+4v^2-3u)$

m) $3(x-3)(x-2)$

n) $(u+v)^2(u+v-1)$

o) $(a-b)(a+b)$

2.2.2

a) $(ab-m)(ab+m)$

b) $(x^2-y)(x^2+y)$

c) $\left(a-\frac{1}{4}\right)\left(a+\frac{1}{4}\right)$

d) $(a+b+x)(a+b-x)$

e) $(ax+2x-y)(ax-2x+5y)$

f) $(a-b+1)(a-b-1)$

g) $3(a+1)(a-1)$

h) $x^3(2xy+3)(2xy-3)$

i) $(a^2+b^2)(a+b)(a-b)$

j) $a(a^2+1)(a+1)(a-1)$

k) $\left(\frac{u^2}{25}+\frac{v^2}{9}\right)\left(\frac{u}{5}+\frac{v}{3}\right)\left(\frac{u}{5}-\frac{v}{3}\right)$

l) $x(x^2y^2+1)(xy+1)(xy-1)$

m) $(a+1)^2$

n) $(1+x^2)^2$

o) $(a^2-3b)^2$

p) $(3x^2+4y)^2$

q) $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$

r) $\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}\right)^2$

s) $(a+b-c)^2$

t) $5(x-1)^2$

u) $(a+b)(x+1)^2$

2.2.3

a) $(x^4-5)(x^8+5x^4+25)$

b) $a\left(a-\frac{2b}{3}\right)\left(a^2+\frac{2ab}{3}+\frac{4b^2}{9}\right)$

c) $\left(3c+\frac{1}{4}\right)\left(9c^2-\frac{3}{4}c+\frac{1}{16}\right)$

d) $(z+2ab^2)(z^2-2ab^2z+4a^2b^4)$

e) $(z^2+3)(z^4-3z^2+9)$

f) $(z-2)^3$

g) $(1+3a)^3$

h) $\left(x+\frac{y}{3}\right)^3$

i) $12\left(a+\frac{b}{4}\right)^3$

2.2.4

a) $(x+2)(x+3)$

b) $(x+1)(x+4)$

c) $(u-2)(u-4)$

d) $(x-7)(x+5)$

e) $(3x+1)^2$

f) $(4z+1)(z+1)$

g) $(x-10)(x+8)$

h) $3\left(y+\frac{7+\sqrt{13}}{6}\right)\left(y+\frac{7-\sqrt{13}}{6}\right)$

i) $(2x+1)(3x+1)$

j) $(x-17)(x-5)$

k) x^2+x+1

l) $(4u-9)^2$

m) $(5x-4)(8x+7)$

n) $(a+10)(a-1)$

o) $2\left(x-\frac{5+\sqrt{41}}{4}\right)\left(x-\frac{5-\sqrt{41}}{4}\right)$

p) $(4m-3)(m+7)$

2.2.5

a) $(x+3)(x-3)(x+2)(x-2)$

b) $(a-2)(a^2+2a+4)(a+3)(a^2-3a+9)$

c) $(x^2+16)(x+4)(x-4)(x^2+1)(x+1)(x-1)$

d) $(x+3)(x-3)(7x^2+2)$

e) $(x-1)(x^2+x+1)(4x-3)(16x^2+12x+9)$

f) $(\sqrt{3}x-1)(\sqrt{3}x+1)(2x^2+3)$

g) $(4x^2+25)(2x+5)(2x-5)(x^2+1)(x+1)(x-1)$

h) $(9x-1)(9x+1)(x^2+1)$

2.2.6

a) $(x+y)(a+b)$

b) $(a+b)(1+x+y)$

c) $(a-b)(x-y)$

d) $(a-4)(x-y)$

e) $(a+1)(x-1)$

f) $(x^2+1)(x-1)$

g) $\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{z}{3}\right)\left(y-\dfrac{1}{2}\right)$

h) $(10z-x)(x-1)$

i) $(a-b+1)(a-b-1)$

j) $(2x-3y)(2x+3y+1)$

k) $(1+x)(1+x+x^2)(1-x+x^2)$

l) $(2y+1)(4y^2-2y+1)(y-1)$

m) $(x^2+1)(x-1)$

n) $(2a^3+3)(a-1)$

o) $(6x+y)(x+3z)$

2.2.7

a) $(x-2\,y)(1-2\,y)$

b) $(2\,x+3)(x-5\,y)$

c) $(1+4\,y^2)(3\,x^3-5\,z)$

d) $(2\,x+3\,y)(4+y)$

e) $\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\,x+\frac{1}{3}\,y\right)$

f) $\left(x^3-\frac{4}{5}\,y\right)\left(x^2-\frac{5}{4}\,z\right)$

g) $\left(\frac{2}{9}\,y^3-\frac{1}{20}\right)\left(x^2+\frac{20}{3}\right)$

h) $x^2y^3(3\,z+1)(x^2+xy-y^2)$

i) $(x^{2m}-2\,y^m)(x^{m+2}-y^{m+3})$

j) $(x^m-y^{2n})(x^{2m+1}+2\,y^{3n})$

Division euclidienne

2.3.1

a) $Q(x)=x^2-3x+1,\ R(x)=0$

b) $Q(x)=x^3-3x^2+3x-7,\ R(x)=20x-8$

c) $Q(x)=x^2-3x+3,\ R(x)=-8x+4$

d) $Q(x)=7x^2+8x+1,\ R(x)=0$

e) $Q(x)=x^6+x^5-x^3+x+1,\ R(x)=0$

f) $Q(x) = x^2 - 4x + 2,\ R(x) = x^4 - 10x$

g) $Q(x) = \dfrac{1}{2}x^3,\ R(x) = -x^4 - \dfrac{1}{2}x^3 + 1$

h) $Q(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 + 5,\ R(x) = -10$

i) $Q(x) = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{4}x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{10}{9},\ R(x) = 0$

j) $Q(x) = x + 4,\ R(x) = 12x - 1$

2.3.2

a) $a(x) = b(x) \cdot (x^2 - 5\,x + 6)$

b) $a(x) = b(x) \cdot (-4\,x^2 - 5\,x + 2) + (46\,x)$

c) $a(x) = b(x) \cdot (-\,x^3 -\ x^2 + 4) + (-3\,x + 9)$

2.3.3

Il faut multiplier $x - 5$ par $x^2 + 2\,x + 6$.

2.3.4

Le polynôme est $10\,x^4 - 6\,x^3 + 7\,x^2 - 4\,x + 2$.

2.3.5

$P(1) = -3$; $P(3) = 35$; $P(0) = -7$; $P(-2) = -45$; $P(-3) = -103$; $P(\frac{1}{3}) = -\frac{151}{27}$; $P(-\frac{1}{2}) = -\frac{21}{2}$.

2.3.6

Soit $A = t^5 - 7\,t^4 - t^2 - 9\,t + 9$, $B = t^2 - 5\,t + 4$, le quotient de A par B est $t^3 - 2\,t^2 - 14\,t - 63$, le reste étant $-268\,t + 261$.

2.3.7

$P = \frac{1}{3}(X^2 - 4X - 3)$.

2.3.8

a) $a(1) = 0$ donc le polynôme $b(x)$ divise le polynôme $a(x)$

b) $a(-2) = 132$

c) $a(0) = -7$

2.3.9

59 ; 19 ; 0.

2.3.10

a) $x - 2$

b) $3\,x^2 - x - 2$

2.3.11

a) oui ; b) non ; c) non ; d) oui ; e) oui ; f) oui ; $P(x) = (x - 1)(x + 1)(x + 5)(x - 3)$.

2.3.12
a)$1,\ 2,\ -3$; b) $-1,\ 6$.

2.3.13
a)$m=-3$ et $n=2$; b) $m=-7$ et $n=36$.

2.3.14
Je suis $x(x-2)(x+2)(x-3)(2x-1)$.

2.3.15
a)$P(x)=(x-5)(x+3)(x-1)(2x+3)$; b) $P(x)=x(x-2)(x-3)(2x+1)$.

2.3.16
$2\,x\,(x-2)^2$

2.3.17
$\frac{1}{2}$; -4 ; -3 ; 1.

2.3.18
a)$P(x)=x(x+1)(x-2)(x+3)$;
b)$P(x)=(x-2)(x+2)(x+3)(x^2+4)$;
c)$P(x)=(x-2)(x+2)(2x-1)(3x-1)$.

2.3.19

a) quotient : $x^3+2\,x^2+3\,x+4$ reste : 5
b) quotient : $x^4-x^3+x^2-x+1$ reste : 0
c) quotient : $3\,x^4-14\,x^3+35\,x^2-69\,x+133$ reste : -260

2.3.20
En effectuant la division et en trouvant 0 comme reste, ou si $f(x)=x^6-6\,x^5+15\,x^4-20\,x^3+15\,x^2-6\,x+1$, alors $f(1)=0$.

2.3.21

a) $q(x)=\frac{3}{2}\,x-\frac{1}{2},\quad r(x)=\frac{5}{2}\,x+\frac{1}{2}$
b) $q(x)=\frac{2}{3},\quad r(x)=\frac{2}{3}\,x^2-\frac{2}{3}\,x-\frac{5}{3}$
c) $q(x)=x^2-\frac{1}{7}\,x+1,\quad r(x)=-\frac{1}{7}\,x^2-6\,x$
d) $q(x)=3\,x^2+2\,x+1,\quad r(x)=6\,x+3$
e) $q(x)=7\,x^2-3\,x-1,\quad r(x)=0$
f) $q(x)=2\,x^2-\frac{36}{7}\,x+\frac{25}{7},\quad r(x)=-\frac{113}{7}\,x^2+\frac{151}{7}\,x-8$
g) $q(x)=-\frac{12}{5}\,x^3+\frac{11}{25}\,x^2+\frac{82}{125}\,x-\frac{141}{625},\quad r(x)=-\frac{3058}{625}\,x-\frac{141}{625}$

2.3.22 $p(x)=(x-2)\,(x+3)\,(2x+1)$

2.3.23

a) $(x-1)(x+3)(x+7)$

b) $(x-3)(x-1)(x+1)(x+5)$

c) $(x-2)(x+2)(x+3)(x^2+4)$

d) $(x-2)^2(x-5)(x+3)^2$

2.3.24

a) $p(x)=(x+18)\cdot(x+1)$

b) $p(x)=(x-2)^2$

c) $p(x)=2(x+3)\cdot(x-\frac{1}{2})$

d) $p(x)=3(x-\frac{2}{3})\cdot(x-1)$

e) $p(x)=4(x-\frac{5}{2})^2$

f) $p(x)=(x-3)\cdot(x+3)$

g) $p(x)=(x-\frac{2}{3})(x+\frac{2}{3})\cdot$

h) $p(x)=9x(x-\frac{5}{9})\cdot$

i) $p(x)=8(x+\frac{1}{2})\cdot(x+\frac{1}{4})$

j) $p(x)=\frac{1}{3}x^2-x+4$

2.3.25

a) $x_1=-2,\ x_2=-1,\ x_3=1$

b) $x_1=-2,\ x_2=2,\ x_3=3$

c) $x_1=0,\ x_2=\frac{3}{2}$

d) $x_1=1,\ x_2=-\frac{1}{2},\ x_3=\frac{1}{2}$

2.3.26

a) $(x-2)(x+3)(x^2+x+1)=0 \quad S=\{-3\,;\,2\}$

b) $(x-1)(x-2)^3=0 \quad S=\{1\,;\,2\}$

c) $(x+1)(5x+1)(7x+1)=0 \quad S=\{-1\,;\,-\frac{1}{5}\,;\,-\frac{1}{7}\}$

d) $(x-3)(x+4)^2=0 \quad S=\{-4\,;\,3\}$

2.3.27

a) $x(x+1)^2$

b) $2(a+1)^3(a-1)^3$

c) $a(3a+b)(3a-b)$

d) $2(\sqrt{3}a+1)(\sqrt{3}a-1)(9a^4+3a^2+1)$

e) $(1+x-y)(1-x+y)$

f) $(x^2+1)^2$

g) $(x+y-z)(-7x+y+z)$

h) $(x-1)(x+3)(x+7)$

i) $xy(1-3x)(1+3x)$

j) $(x+3)(x-2)(x^2+2x+4)$

k) $b(2a-b)(a+1)(a-1)$

l) $(x+2y)^3$

m) $(b-a)(b^2+ab+a^2)$

n) $3x(x-2)^3$

o) $(a^2+3b)(a^2-3b)(2x-1)(4x^2+2x+1)$

p) $(x-3)(x^2+9)$

q) $(d-2)\left(d-\dfrac{-5+\sqrt{33}}{2}\right)\left(d-\dfrac{-5-\sqrt{33}}{2}\right)$

r) $x(xy+1)^3$

s) $z^2x^2(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)$

t) $(x-1)(x+1)(3x+2)(2x+3)$

u) $xy(x+1)(x+6)$

v) $2a(2a+b)(4a^2-2ab+b^2)$

w) $(2c+1)^3$

x) $(y+b)^2(y-b)^2$

Fractions rationnelles

2.4.1

a) $\dfrac{18b}{5a^2}$

b) $\dfrac{4vw}{u}$

c) $\dfrac{1}{2}$

d) $-\dfrac{2}{3}$

e) $\dfrac{a+b}{a-b}$

f) $\dfrac{x+4}{x-1}$

g) $\dfrac{1-x}{x(x+1)}$

h) $\dfrac{3(z-4)}{2(z-3)}$

i) $\dfrac{(x-5)^2}{x+5}$

j) $\dfrac{x^2+y^2}{x^3}$

k) $\dfrac{-2}{x(x+y)}$

l) $\dfrac{2x}{9x^2-3x+1}$

m) $\dfrac{1-x+x^2}{x}$

n) $\dfrac{x+1}{x+2}$

o) $\dfrac{x+2}{x-2}$

2.4.2

a) $\dfrac{a+1}{2}$

b) $\dfrac{x-8}{14}$

c) $x-y$

d) $-\dfrac{z+1}{z}$

e) $\dfrac{x}{x-2}$

f) $\dfrac{x}{x-1}$

g) $\dfrac{2(x-3)}{x+1}$

h) $\dfrac{2+3x}{x(x-2)}$

i) $\dfrac{u}{(u^2+4)(2+5u)}$

2.4.3

a) 2

b) $\dfrac{-6}{x+3}$

c) $\dfrac{-3}{x+2}$

d) $\dfrac{6x+11}{(3x+1)^2}$

e) $\dfrac{3a^2+2a+5}{a^3}$

f) $\dfrac{x-1}{x+1}$

g) $\dfrac{x^2-3x-6}{(x+2)(x+3)}$

h) $\dfrac{2}{(m+1)(m-1)}$

i) $-\dfrac{y+5}{(y+2)^2}$

j) $\dfrac{12x^2-19x+23}{6(x+1)(x-1)}$

2.4.4

a) $\dfrac{x-y}{x+y}$

b) $\dfrac{x}{x+y}$

c) $\dfrac{2}{x^2-1}$

d) $\dfrac{3}{x^2}$

e) $\dfrac{x^2}{x+y}$

f) 2

g) 1

h) $\dfrac{1}{x^2-4}$

2.4.5

a) $\dfrac{z+3}{z}$

b) $\dfrac{x+2}{x-2}$

c) $\dfrac{u-3}{u(1-u)}$

d) $-\dfrac{2(x-y)}{(2x+1)^2(2x-1)}$

Equations et systèmes d'équations

2.5.1

a) $S=\{-6;7\}$
b) $S=\{-7;2\}$
c) $S=\{1-3\sqrt{2};1+3\sqrt{2}\}$
d) $S=\{2-\sqrt{11};2+\sqrt{11}\}$
e) $S=\{\frac{2}{3};4\}$
f) $S=\{4;9\}$
g) $S=\emptyset$
h) $S=\{2;\frac{8}{3}\}$
i) $S=\{4;16\}$
j) $S=\{-\frac{1}{3};1\}$
k) $S=\{-5;6\}$
l) $S=\{1;2\}$
m) $S=\{2;4\}$
n) $S=\{-\frac{11}{5};2\}$
o) $S=\{\frac{5}{3};7\}$

2.5.2

$2\,x^2+7\,x-15=0 \iff x=\frac{3}{2}$ ou $x=-5$
$2\,x^2+7\,x-15=(2\,x-3)(x+5)$

a) $(x-4)(2\,x+1)$
b) $(2\,x+1)(3\,x+4)$
c) $(x-5)(6\,x+5)$
d) Pas factorisable
e) $(3\,x+8)(4\,x-3)$
f) $(5\,x-2)(x+\frac{7}{3})$

2.5.3

a) $\mathcal{S} = \{-3; 3\}$
b) $\mathcal{S} = \{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\}$
c) $\mathcal{S} = \{2; 11\}$
d) $\mathcal{S} = \{-5; -2; 3\}$
e) $\mathcal{S} = \{-2; -1; 1; 2\}$
f) $\mathcal{S} = \{1\}$
g) $\mathcal{S} = \{-2; -1; 2\}$
h) $\mathcal{S} = \{1; 3\}$
i) $\mathcal{S} = \{-5; -4\}$
j) $\mathcal{S} = \{-2; -1; 1\}$

2.5.4

a) $\mathcal{S} = \{-2; 2; 6\}$
b) $\mathcal{S} = \{-2; 2; 3\}$
c) $\mathcal{S} = \{-2; 2\}$
d) $\mathcal{S} = \{-\frac{2}{7}; 0; \frac{1}{4}\}$
e) $\mathcal{S} = \{\frac{3}{2}; 2\}$
f) $\mathcal{S} = \{-4; 0; 6\}$
g) $\mathcal{S} = \{-3; 3\}$
h) $\mathcal{S} = \{\frac{1}{3}; 3\}$

2.5.5 $x_1 = -3$, $x_2 = 0$, $x_3 = 3$

2.5.6

a) $x_1 = -3$, $x_{2,3} = \pm 2$, $x_4 = 3$
b) $x_1 = -1$, $x_2 = 1$
c) Pas de solution
d) $x_1 = -1$, $x_2 = 2$
e) $x_1 = -\sqrt{2}$, $x_2 = \sqrt{2}$
f) $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{1}{3}$
g) $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$

2.5.7

a) $5\,x^2 + 3\,x - 39 = 0$, $\Delta = 789$, $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{-3-\sqrt{789}}{10}; \dfrac{-3+\sqrt{789}}{10}\right\}$
b) $5\,x^2 + 21\,x - 164 = 0$, $\Delta = 3721 = 61^2$, $\mathcal{S} = \{-\frac{41}{5}; 4\}$
c) $x^2 + 8\,x - 9 = 0$, $\Delta = 10^2$, $\mathcal{S} = \{-9; 1\}$
d) $0 = 0$, indéterminé, $\mathcal{S} = \mathbb{R}$
e) $2\,x^2 - 3\,x + 229 = 0$, $\Delta = -1823$, impossible, $\mathcal{S} = \emptyset$
f) $x^2 - 14\,x + 29 = 0$, $\Delta = 80 = 16 \cdot 5$, $\mathcal{S} = \{7 - 2\sqrt{5}; 7 + 2\sqrt{5}\}$
g) $4\,x^2 - 3\,x - 27 = 0$, $\Delta = 441 = 21^2$, $\mathcal{S} = \{-\frac{9}{4}; 3\}$
h) $25\,x^2 - 80\,x + 32 = 0$, $\Delta = 3200 = 1600 \cdot 2$, $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{8-4\sqrt{2}}{5}; \dfrac{8+4\sqrt{2}}{5}\right\}$
i) $5\,x^2 + 12\,x - 513 = 0$, $\Delta = 10404 = 102^2$, $\mathcal{S} = \{-\frac{57}{5}; 9\}$
j) $x^2 - 3\,x + 2 = 0$, $\Delta = 1$, $\mathcal{S} = \{1; 2\}$
k) $5\,x^2 + 28\,x - 35 = 0$, $\Delta = 1484 = 4 \cdot 371$, $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{-14-\sqrt{371}}{5}; \dfrac{-14+\sqrt{371}}{5}\right\}$
l) $4\,x^2 + 3\,x - 76 = 0$, $\Delta = 1225 = 35^2$, $\mathcal{S} = \{-\frac{19}{4}; 4\}$

2.5.8

a) $\mathcal{S} = \{-23\}$
b) $\mathcal{S} = \{0\}$
c) $\mathcal{S} = \{\frac{-3}{8}\}$
d) $\mathcal{S} = \mathbb{R}$
e) $\mathcal{S} = \{\frac{16}{5}\}$
f) $\mathcal{S} = \{\frac{2}{3}\}$

2.5.9

a) $x_1 = -3$, $x_2 = 3$
b) $x_1 = -5$, $x_2 = 0$
c) $x = 3$
d) $x_1 = 1$, $x_2 = 5$
e) $x_1 = -\frac{13}{2}$, $x_2 = -\frac{7}{2}$
f) Pas de solution
g) $x_1 = p - \sqrt{q}$, $x_2 = p + \sqrt{q}$ si $q > 0$
h) $x_1 = -5$, $x_2 = -1$
i) $x_1 = -5$, $x_2 = -1$
j) $x_1 = -4$, $x_2 = -1$
k) $x_1 = -4$, $x_2 = -1$
l) $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}$ si $b^2 - 4\,a\,c$

2.5.10

a) $x_1 = 1$, $x_2 = 2$
b) $x_1 = 1$, $x_2 = 4$
c) Pas de solution
d) $x = -3$
e) $x_1 = 11$, $x_2 = 19$
f) $x_{1,2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{41}}{4}$
g) $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{13}$
h) $x_1 = -\frac{3}{2}$, $x_2 = 2$

2.5.11

a) $x_1 = 3$
b) $x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$, $x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$
c) $x_1 = -5$, $x_2 = -\frac{5}{3}$
d) $x_1 = 4$
e) $x_1 = -25$, $x_2 = 25$
f) $x_1 = -3$, $x_2 = 18$

2.5.12

a) $S = \{4\}$
b) $S = \{0\}$
c) $S = \{0; \frac{3}{2}\}$
d) $S = \{-1; 1\}$
e) $S = \{-3\}$
f) $S = \{1; 4\}$
g) $S = \emptyset$
h) $S = \{-3\}$
i) $S = \{2\}$
j) $S = \{2\}$

2.5.13

a) $ED = \mathbb{R} - \{-3; 3\}$, $S = \{-2\}$

b) $ED = \mathbb{R} - \{-3; 0\}$, $S = \{1; 6\}$

c) $ED = \mathbb{R} - \{-1; \frac{3}{2}\}$, $S = \{0; \frac{7}{2}\}$

d) $ED = \mathbb{R} - \{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\}$, $S = \{-1; -\frac{5}{7}\}$

e) $ED = \mathbb{R} - \{-3; 2; 3\}$, $S = \{-2; \frac{1}{2}\}$

f) $ED = \mathbb{R} - \{1; 2; 3\}$, $S = \{6\}$

2.5.14

a) $x = 6$
b) $x_1 = 5$, $x_2 = 7$
c) $x_1 = -1$, $x_2 = -\frac{3}{4}$
d) Pas de solution
e) $x = -1$
f) $x = -\frac{5}{4}$
g) $x = 16$
h) $x = \frac{3}{4}$
i) Pas de solution
j) $x = 2$

2.5.15

a) $x = 6$
b) $x = 3$

2.5.16

a) $x = \frac{5}{3}$
b) $x = 0$ ou $x = -\frac{5}{3}$

2.5.17

a) –
b) $f(A) = \{100; 45; 10; 9; 3; 0; 1; 2; 3; 5; 36; 183\}$
c) –
d) $h(B) = \{7; 5; 3; 1; 1; 3; 5\}$

2.5.18

a) $x = 7$ ou $x = -15$
b) $x = \frac{2}{3}$ ou $x = \frac{10}{3}$
c) $x = -1$ ou $x = 2$
d) $x = -2$ ou $x = -\frac{4}{3}$

2.5.19

a) $(x; y) = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$
b) $(x; y) = (15; 35)$
c) $(x; y) = \left(-1; \frac{1}{3}\right)$
d) $(x; y) = (2\,t + 1; t)\,, t \in \mathbb{R}$
e) Aucune solution
f) $(x; y) = (2; 0)$

2.5.20 $m = 30$

2.5.21

a) $(x; y) = (2; -1)$
b) $(x; y) = (\frac{68}{5}; \frac{27}{5})$
c) $(x; y) = (-123/29; 150/29)$
d) $(x; y) = (4; 3)$
e) $(x; y) = (9/2; -5/3)$
f) $(x; y) = (-2; -3)$
g) $(x; y; z) = (2; 3; 14)$
h) $(x; y; z) = (3; -5; 10)$
i) $(x; y; z) = (5; 1; -5)$
j) $(x; y; z) = (20; 10; -5)$
k) $(x; y; z) = (3; -2; -1)$
l) $(x; y; z) = (28/15; 313/60; 293/30)$
m) $(x; y; z) = (6; -10; 1)$
n) $(x; y; z) = (-39/5; 11; 37/5)$
o) $(x; y; z) = (1; 2; 3)$
p) $(x; y; z) = (7\,t; 16\,t; 13\,t), t \in \mathbb{R}$
q) $(x; y; z) = (1 - t; t - 2; t), t \in \mathbb{R}$
r) $(x; y; z) = (1; 6; 5)$
s) $(x; y; z) = (13 - 11\,t; t - 2; 3\,t), t \in \mathbb{R}$
t) $(x; y; z) = (t + 4; 5 - 2\,t; t), t \in \mathbb{R}$
u) $(x; y; z) = (1; -1; 2)$
v) Le système n'a pas de solution.
w) $(x; y; z) = (7/4 - 3\,t; 9/4 - 5\,t; 4\,t), t \in \mathbb{R}$
x) $(x; y; z; t) = (2\,u - 5\,v; 3\,u - 4\,v; 7\,u; 7\,v), u \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}$
y) Le système n'a pas de solution.
z) $(x; y; z; t; u) = (1; -1; 1; -1; 1)$

2.5.22

a) $(x; y) = (2; 3)$
b) $(x; y) = (-60; 90)$ ou $(18; 12)$
c) $(x; y) = (1; 10)$ ou $(10; 1)$
d) $(x; y) = (-5; 3)$ ou $(3; -5)$ ou $(2 + \sqrt{13}; 2 - \sqrt{13})$ ou $(2 - \sqrt{13}; 2 + \sqrt{13})$
e) $(x; y) = (-1; 1)$ ou $(1; -1)$
f) $(x; y) = (3; 2)$ ou $\left(\sqrt{2.5 \cdot (\sqrt{5} - 1)}; -\sqrt{2.5 \cdot (\sqrt{5} + 1)}\right)$ ou $(-3; -2)$
ou $\left(-\sqrt{2.5 \cdot (\sqrt{5} - 1)}; \sqrt{2.5 \cdot (\sqrt{5} + 1)}\right)$
g) $(x; y) = (1; -2)$ ou $\left(\dfrac{\sqrt{21} - 2}{3}; \dfrac{-\sqrt{21} - 2}{3}\right)$ ou $(-2; 1)$ ou $\left(\dfrac{-\sqrt{21} - 2}{3}; \dfrac{\sqrt{21} - 2}{3}\right)$
h) $(x; y) = (5; 4)$

2.5.23

a) $(x; y) = (2; -1)$ ou $(\frac{14}{3}; \frac{13}{3})$
b) $(x; y) = (17; -8)$

Equations paramétriques

2.6.1

a) $S = \{6\}$ b) $S = \{2\}$ c) $S = \{9\}$ d) $S = \emptyset$

e) Avec la condition $m \in \mathbb{R}^\star - \{1\}$, $S = \left\{\dfrac{3\,m}{m-1}\right\}$

2.6.2

a) $(a-1)\,x = a+1$

1) $a \neq 1$ $S = \left\{\dfrac{a+1}{a-1}\right\}$

2) $a = 1$ $S = \emptyset$

b) $(n-1)\,x = n^2-1$

1) $n \neq 1$ $S = \{n+1\}$

2) $n = 1$ $S = \mathbb{R}$

c) $(m-4)\,x = m^2-16$

1) $m \neq 4$ $S = \{m+4\}$

2) $m = 4$ $S = \mathbb{R}$

d) $(a^2-1)\,x = a-1$

1) $a \in \mathbb{R} - \{-1; 1\}$ $S = \left\{\dfrac{1}{a+1}\right\}$

2) $a \in \{-1; 1\}$

i) $a = 1$ $S = \mathbb{R}$

ii) $a = -1$ $S = \emptyset$

e) $(b^2+1)\,x = b^2-1$ $S = \left\{\dfrac{b^2-1}{b^2+1}\right\}$

f) $(4\,a^2-1)\,x = 2\,a+1$

1) $a \in \mathbb{R} - \{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\}$ $S = \left\{\dfrac{1}{2\,a-1}\right\}$

2) $a \in \{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\}$

i) $a = \frac{1}{2}$ $S = \emptyset$

ii) $a = -\frac{1}{2}$ $S = \mathbb{R}$

g) $(2\,a-1)\,x = 4\,a^2-1$

1) $a \neq \frac{1}{2}$ $S = \{2\,a+1\}$

2) $a = \frac{1}{2}$ $S = \mathbb{R}$

h) $2\,bx = 4\,b$

1) $b \neq 0$ $S = \{2\}$

2) $b = 0$ $S = \mathbb{R}$

i) $ax = 6$

1) $a \neq 0$ $S = \left\{\dfrac{6}{a}\right\}$

2) $a = 0$ $\qquad S = \emptyset$

2.6.3

a) $V = \mathbb{R}^{\star}$

$(m+1)\,x = 1 - m^2$

1) $m \neq -1$ $\qquad S = \{1 - m\}$

2) $m = -1$ $\qquad S = \mathbb{R}$

b) $V = \mathbb{R} - \{0; 1\}$

$(a-1)\,x = 3\,a - 1$ $\qquad S = \left\{\dfrac{3\,a-1}{a-1}\right\}$

c) $V = \mathbb{R} - \{-1; 1\}$

$2\,nx = 1$

1) $n \neq 0$ $\qquad S = \left\{\dfrac{1}{2\,n}\right\}$

2) $n = 0$ $\qquad S = \emptyset$

d) $V = \mathbb{R} - \{-1; 1\}$

$(b^2 - b)\,x = b^2 + b$

1) $b \neq 0$ $\qquad S = \left\{\dfrac{b+1}{b-1}\right\}$

2) $b = 0$ $\qquad S = \mathbb{R}$

e) $V = \mathbb{R}^{\star}$

$(m-4)\,x = m - 4$

1) $m \neq 4$ $\qquad S = \{1\}$

2) $m = 4$ $\qquad S = \mathbb{R}$

f) $V = \mathbb{R}^{\star}$

$(7-y)x = 11y$

1) $y \neq 7$ $\qquad S = \left\{\dfrac{11\,y}{7-y}\right\}$

2) $y = 7$ $\qquad S = \emptyset$

g) $V = \mathbb{R}^{\star}$

$(y^2 - 2\,y)x = 2\,y - 1$

1) $y \neq 2$ $\qquad S = \left\{\dfrac{2\,y-1}{y^2-2\,y}\right\}$

2) $y = 2$ $\qquad S = \emptyset$

h) $V = \mathbb{R} - \{-1; 1\}$

$(3\,z - 1)x = 3\,z^2 + 2\,z - 1$

1) $z \neq \frac{1}{3}$ $\qquad S = \{z + 1\}$

2) $z = \frac{1}{3}$ $\qquad S = \mathbb{R}$

i) $V = \mathbb{R} - \{0; 1\}$

$(a-1)x = 2\,a$ $\qquad S = \left\{\dfrac{2\,a}{a-1}\right\}$

j) $V = \mathbb{R} - \{-1; 1; 2\}$
$2\,x = 2\,b^2 - 8\,b$ $\qquad S = \{b^2 - 4\,b\}$

k) $V = \mathbb{R} - \{-5; 0; 5\}$
$(a^2 + 10\,a - 25)\,x = a^3 + 10\,a^2 - 25\,a$
1) $a^2 + 10\,a - 25 \neq 0$ $\qquad S = \{a\}$
2) $a^2 + 10\,a - 25 = 0$ $\qquad S = \mathbb{R}$

l) $V = \mathbb{R} - \{-1; 0; 1\}$
$(a^2 + 2\,a - 1)\,x = a^3 + 2\,a^2 - a$
1) $a^2 + 2\,a - 1 \neq 0$ $\qquad S = \{a\}$
2) $a^2 + 2\,a - 1 = 0$ $\qquad S = \mathbb{R}$

2.6.4

a) $m < 5$ avec $m \neq -4$
b) $m = 4$
c) $m = 2$
d) Il n'y a jamais deux racines inverses

2.6.5

a) $m = 1$
b) $m = 4$
c) $m = \frac{50}{9}$
d) $m = 4$

2.6.6

a) $m = 9$ ou $m = 25$
b) $m = 1$
c) Pas de solution
d) $m = -1$

2.6.7

a) $p = \pm 12$
b) Pas de solution
c) $p = \pm 16$
d) $p = 15$

2.6.8

a) $m = 2$
b) $m \in]\frac{7}{2}; 4[\cup]8; +\infty[$
c) $m = 4$ ou $m = 8$

2.6.9

a) $m = 2$
b) $m \in]\frac{5}{2}; 3[\cup]3; +\infty[$
c) impossible

Problèmes

2.7.1 On trouve $x = 0$ et $x = 1$. Les triangles ont pour dimensions 3, 4, 5 et 6, 8, 10.

2.7.2

Les deux nombres cherchés sont 6 et 12.

2.7.3

a) $x = 5$ b) $x = 7$

2.7.4
$x = 75cm$

2.7.5

a) $\sqrt{2}$ b) 297.3×210.2

2.7.6
70.27 m

2.7.7

a) $t(v) = \dfrac{(v - v_0)}{9.8}$ b) 40.6 m/s

2.7.8
La somme est égale à 340 francs.

2.7.9
La bouteille coûte 102.50 francs et le bouchon coûte 2.50 francs.

2.7.10

a) -40 b) 160 °C

2.7.11
$x < \frac{16}{\pi}$

2.7.12
$x = \frac{6}{5}$

2.7.13
En choisissant $x = 5$ ou $x = 5\,(2 - \sqrt{2})$

2.7.14
Jean avait 40 billes et Pierre avait 50 billes.

2.7.15
Le nombre est 468.

2.7.16
220 montées, 60 descentes et 460 aller-retour.

2.7.17
CHF 111300.- ; CHF 110240.- ; CHF 109200.-

2.7.18
Il détient 45 ouvrages.

2.7.19
La largeur de l'allée est de 2.5 m.

2.7.20
Les diagonales de ce losange mesurent 12 cm et 17 cm.

2.7.21
Les deux autres côtés du triangle mesurent 49.5 m et 50.5 m.

2.7.22
Les deux dimensions sont 391 m et 80 m.

2.7.23
Le côté du premier réservoir mesure 1.2 m ; celui du second mesure 0.5 m.

2.7.24
Après $t = \frac{23}{3}$ ans

Chapitre 3

Fonctions

3.1 Quelques démonstrations

3.1.1 Soit $a, b \in \mathbb{R}_+$. Montrer que si $a \leq b$, alors $a \leq \frac{a+b}{2}$ et $\sqrt{a\,b} \leq b$.

3.1.2 (Raisonnement par l'absurde) Un de mes amis, qui s'appelle Pierre, m'avait dit : "Je passerai peut être chez toi lundi après-midi. Si tu n'es pas là, je laisserai un mot dans la boîte aux lettres." Or, j'ai été obligé de sortir lundi après-midi. En rentrant chez moi, je constate qu'il n'y a pas de mot dans la boîte aux lettres...
Pierre est-il passé chez moi ce lundi après-midi ?
Utiliser un raisonnement par l'absurde pour démontrer que :

$$(\forall x \in \mathbb{R} - \{-2\}) \Longrightarrow \left(\frac{x+1}{x+2} \neq 1\right)$$

3.1.3 En raisonnant par l'absurde, montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

3.1.4 Soit $a, b \in \mathbb{Z}$. Montrer que si $b \neq 0$, alors $a + b\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. (Utiliser le fait que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$).

3.1.5 Sachant que tout entier supérieur ou égal à 2 admet un diviseur premier, montrer que l'ensemble $\mathcal{P}$ des nombres premiers est infini.

3.1.6 Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec $n > 3$, l'expression $n^2 - n - 6$ est un nombre pair.

3.1.7 Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $x = \sin(x)$.

3.1.8 Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $(x^2 \leq x \Longrightarrow |x| = x)$.

3.1.9 Soit $z \in \mathbb{Z}$. Montrer que (z^2 impair $\Longrightarrow z$ impair)).

3.1.10 Est-ce que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $(x < 2 \Longrightarrow x^2 < 4)$?

3.1.11 Démontrer par l'absurde que $\forall n \in \mathbb{N} - \{0\}$, le nombre $\sqrt{n^2+1} \notin \mathbb{N}$.

3.1.12 Écrire avec des *quantificateurs* les propositions suivantes :

a) f est constante sur $\mathbb{R}$ (où f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$).

b) f n'est pas constante sur $\mathbb{R}$.

3.2 Ensembles et intervalles

3.2.1 Soit A une partie de $\mathbb{N}$ définie par

$$A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$$

Donner en notation énumérative les parties suivantes de A :

a) $B = \{x \in A \mid x \text{ est un multiple de } 3\}$.

b) $C = \{x \in A \mid x \text{ est un diviseur de } 24\}$.

c) $B \cap C$, $B - C$, $\complement_A(B) \cap \complement_A(C)$.

3.2.2 Expliciter les ensembles suivants :

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x = 0\}$

b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists y \in \mathbb{N} : (x^2 = y^2)\}$

c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid |x+1| = 2\}$

d) $D = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x+3| \leq 2\}$

e) $E = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 = x\}$

3.2.3 Soit l'ensemble

$$E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}.$$

Trouver une partition de E comprenant 4 parties A, B, C, D telles que :

- $A \cup C = \{1; 2; 3; 4\}$
- $C \cup B = \{4; 5; 7\}$
- $E \cap D = \{6; 8; 9; 10\}$

3.2.4 Déterminer la partie E de $\mathbb{N}$ qui satisfait aux conditions :
- $E \subseteq \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$
- $E \subseteq \{1; 3; 4; 6; 7; 8\}$
- $\{1; 3; 4; 6\} \subseteq E$

3.2.5 Déterminer les sous-ensembles A et B de $\mathbb{Z}$ qui remplissent les conditions :
- $A \cup B =\subseteq \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$
- $A \cap B = \emptyset$
- $\forall x \in A,\ \exists y \in B$ de sorte que $x - y = 1$ et $\forall y \in B,\ \exists x \in A$ de sorte que $x - y = 1$.

3.2.6 Trouver les parties A, B et C de $\mathbb{N}$ qui remplissent les conditions :
- $1 \in A$
- $\{2; 4\} \cap B = \emptyset$
- $3 \in A \cap B \cap C$
- $4 \in A \cap C$
- $A \cap B \not\subseteq C$
- $B \cup C \not\subseteq A$
- $A \cup B \cup C = \{1; 2; 3; 4\}$

3.2.7 Décrire les ensembles suivants à l'aide d'intervalles

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant x \leqslant 5\}$
b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 4 \leqslant x < 5\}$
c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$
d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 10\}$
e) $E = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -2 \text{ et } x \leqslant 2\}$
f) $F = \mathbb{R}$
g) $G = \{2\}$

3.2.8 Trouver deux ensembles A et B de $\mathbb{Z}$ tels que

a) $A \cup B = \{0\ ; 1\ ; 2\ ; 3\ ; 4\}$ et $A \cap B = \{\ \}$
b) $A \cup B = \{0\ ; 1\ ; 2\ ; 3\ ; 4\}$ et $A \cap B = \{2\ ; 3\ ; 4\}$

3.2.9 On donne trois intervalles I, J et K de $\mathbb{R}$. Déterminer $I \cap J$, $I \cap K$, $I - (J \cup K)$, $(I - J) \cup (I - K)$ dans les cas suivants.

a) $I = [-3\ ;\ 4[$ $\quad J = [-2\ ;\ 0[$ $\quad K =]-5\ ;\ 3]$
b) $I =]-4\ ;\ 2]$ $\quad J = [-2\ ;\ 3]$ $\quad K =]-3\ ;\ 1[$
c) $I =]-5\ ;\ 3[$ $\quad J =]-1\ ;\ 5]$ $\quad K = [-3\ ;\ 4]$

3.3 Généralités sur les fonctions

3.3.1 Soit $D = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$. On considère les fonction suivantes de D dans $\mathbb{Q}$. Énumérer les éléments de $f(D)$.

a) $f\colon x \longmapsto 3\,x - 5$

b) $f\colon x \longmapsto x^2 - 3$

c) $f\colon x \longmapsto \dfrac{1}{x+4} - 1$

d) $f\colon x \longmapsto \dfrac{x+1}{x^2+1}$

3.3.2 Les correspondances suivantes sont-elles des fonctions ?
Justifier les réponses.

a) $\begin{array}{rccc} a: & \mathbb{N}^* & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & x & \longmapsto & 3\,x - 2 \end{array}$

b) $\begin{array}{rccc} b: & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & x & \longmapsto & 5\,x - 7 \end{array}$

c) $\begin{array}{rccc} c: & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{Q} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{1}{x-3} \end{array}$

d) $\begin{array}{rccc} d: & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} -2x & \text{si } x \leq 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{array}$

e) $\begin{array}{rccc} e: & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & x & \longmapsto & 5\,x^2 - 5 \end{array}$

f) $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & x & \longmapsto & x^2 - 1 \end{array}$

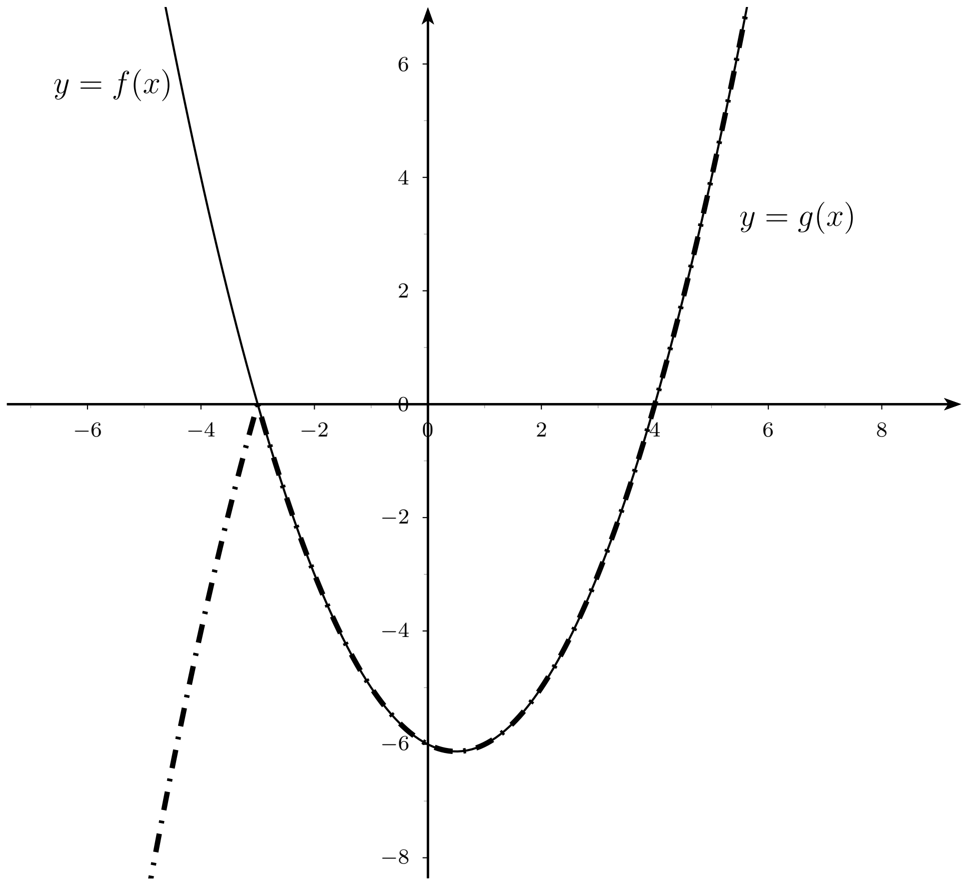
g) $\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$

h) $\begin{array}{rccc} h: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} -1 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \end{array}$

i) $\begin{array}{rccc} i: & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{1}{x^2-1} \end{array}$

j) $\begin{array}{rccc} j: & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{1}{x^2+1} \end{array}$

3.3.3 On donne les fonctions f et g ci-dessous par leur graphe. Le graphe de la fonction f est représenté par un filet mince tandis que celui de g est tracé en trait interrompu épais.

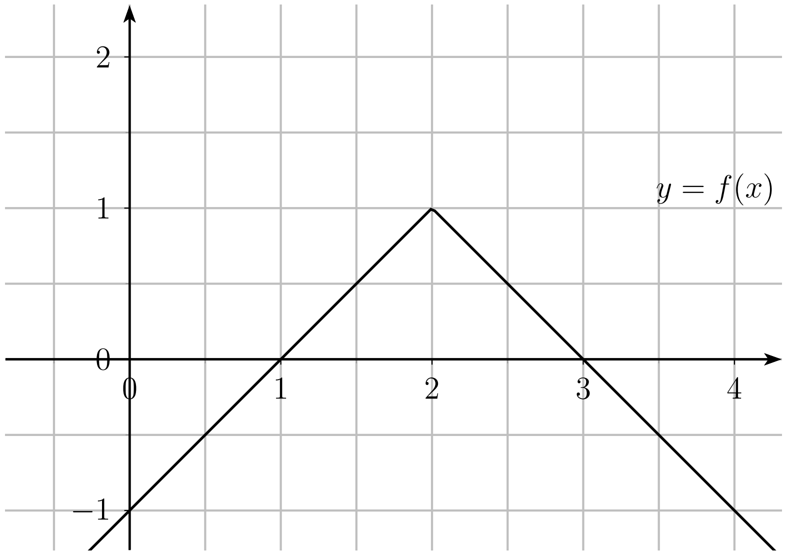


Peut-on dire que g soit définie par l'expression mathématique suivante ?

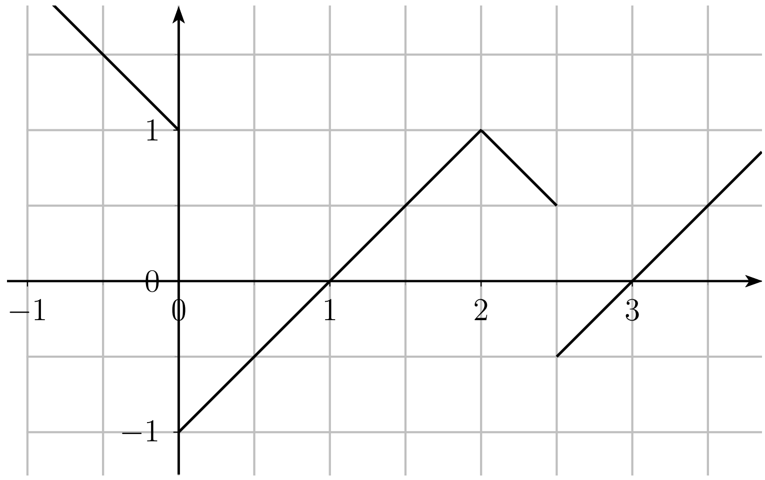
$$g(x) = \begin{cases} -f(x) & \text{si } f(x) > 0 \\ f(x) & \text{si } f(x) \leq 0 \end{cases}$$

Justifier la réponse. Si vous répondez par la négative, donnez une expression mathématique qui définit g à partir de f.

3.3.4 On donne la fonctions f ci-dessous par son graphe.



Soit encore le graphe de la fonction g :



Peut-on dire que g soit définie par l'expression mathématique suivante ?

$$g(x) = \begin{cases} -f(x) & \text{si } x < 0 \\ f(x) & \text{si } x \in [0; 2.5] \\ -f(x) & \text{sinon} \end{cases}$$

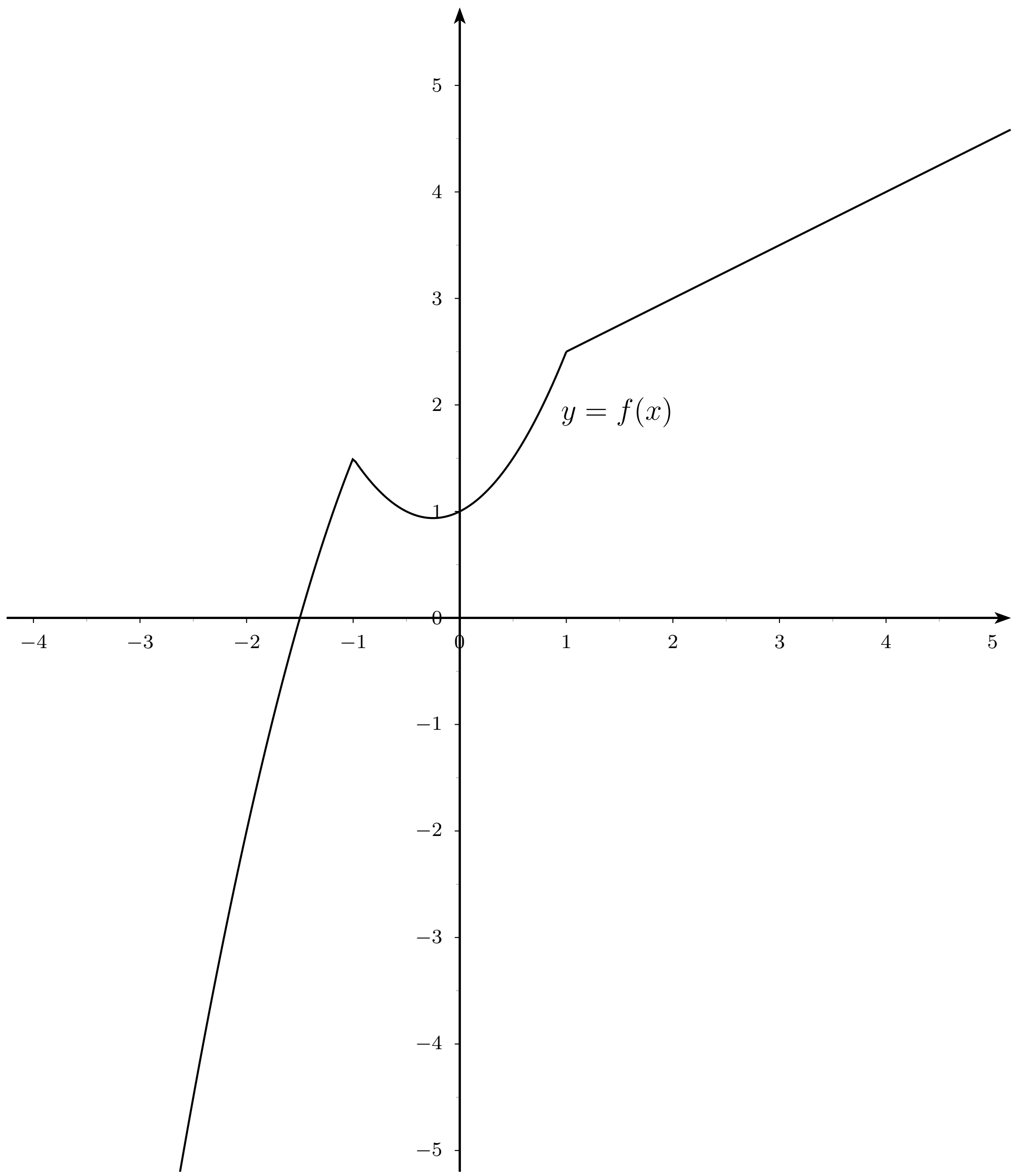
a) Justifier la réponse.

b) Définir g par morceaux à partir de f.

c) Esquisser le graphe de la fonction

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) > 0 \\ -f(x) & \text{si } f(x) \leq 0 \end{cases}$$

3.3.5 On considère une fonction $f(x)$ définie par morceaux dont le graphe est tracé ci-dessous :



Cette fonction a été construite à partir de deux arcs de paraboles et d'une partie d'une fonction affine. On sait que la fonction f est continue, à savoir qu'on peut la tracer sans lever le crayon. À partir des informations ci-dessous, écrire par morceaux l'expression mathématique de f :

a) les expressions mathématiques des deux arcs de parabole sont :

$$x^2 + \frac{x}{2} + 1 \quad \text{et} \quad -x^2 + \frac{x}{2} + 3$$

b) la pente de la partie affine de la fonction f vaut $1/2$.

3.4 Etude d'une fonction

3.4.1 Déterminer l'ensemble de définition D des fonctions suivantes.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$

b) $f(x) = \dfrac{x}{x-3}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{5+x}$

d) $f(x) = \dfrac{1-x^2}{x^2-4}$

e) $f(x) = \dfrac{2+x}{x^2+9}$

f) $f(x) = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2\,x}{x+1}$

g) $f(x) = \dfrac{x^2-7}{(x-3)(x+4)}$

h) $f(x) = \dfrac{5}{(x+2)^2}$

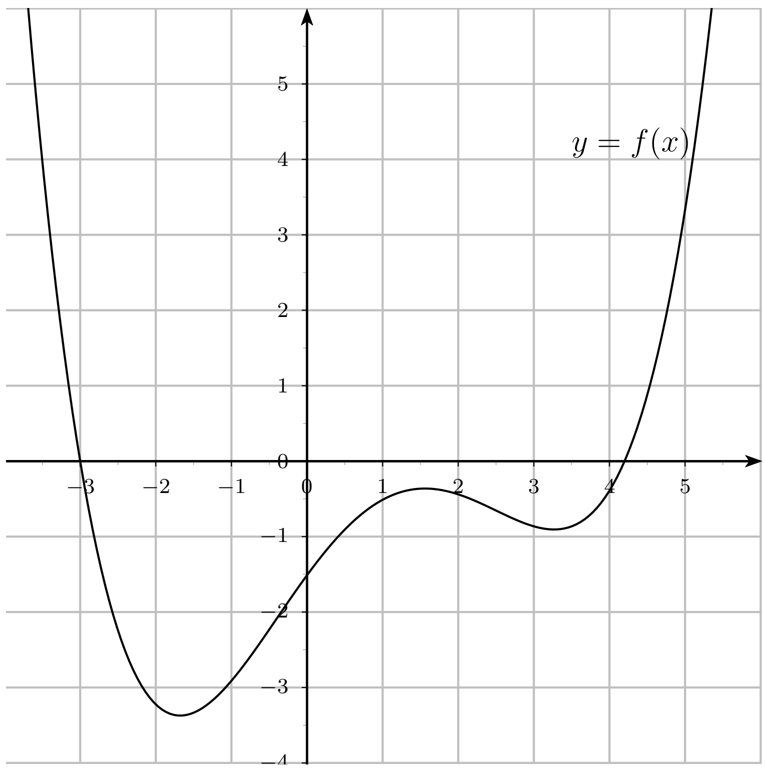
i) $f(x) = \sqrt{x-1}$

j) $f(x) = \dfrac{5\,x}{\sqrt{x+5}}$

k) $f(x) = \sqrt{2-x}$

l) $f(x) = \sqrt{1-2\,x}$

3.4.2 La fonction f est donnée par le graphe ci-dessous.



Estimer en observant le graphe,

a) la valeur de $f(0)$;

b) la valeur de $f(-2)$;

c) les valeurs de x sachant que $f(x) = 0$;

d) les valeurs de x sachant que $f(x) = 2$;

e) les valeurs de a sachant que l'équation $f(x) = a$ ne possède qu'une seule solution. Quelle est alors cette solution ?

f) les valeurs de x sachant que $f(x) = x$;

g) les valeurs de x sachant que $f(x) = -x$;

3.4.3 Dessiner les graphes des fonctions

$$f(x) = -2\,x + 6 \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{2}\,x - 3$$

Résoudre ensuite les équations et inéquations suivantes.

a) $f(x) = 0$

b) $f(x) = g(x)$

c) $f(x) = x$

d) $f(x) < 0$

e) $f(x) > g(x)$

f) $f(x) \geq x$

3.4.4 Dessiner les graphes des fonctions affines f telles que :

a) $f(-1) = 2$ et la pente du graphe de f vaut -2

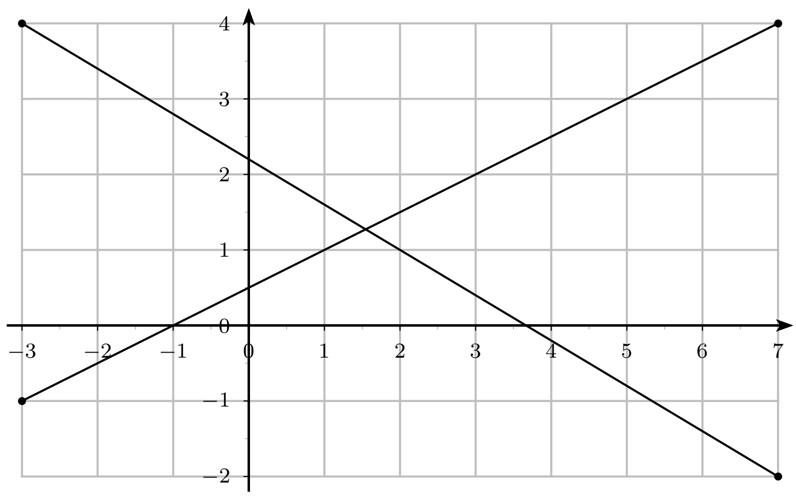
b) $f(0) = -1$ et la pente du graphe de f vaut $\frac{3}{2}$

c) $f(2) = 0$ et la pente du graphe de f vaut $-\frac{3}{5}$

d) $f(3) = 1$ et la pente du graphe de f vaut 1

e) $f(4) = 5$ et la pente du graphe de f vaut 0

3.4.5

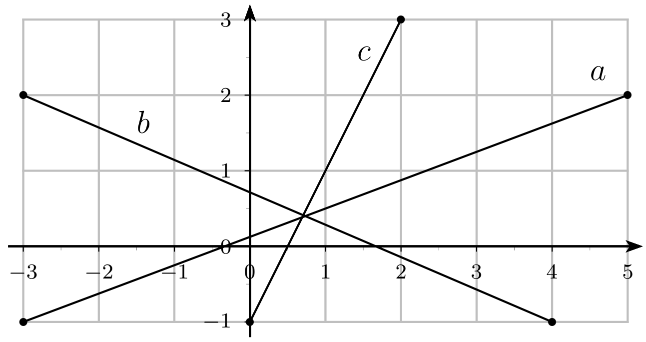


a) Calculer les coordonnées du point d'intersection I des deux droites dessinées ci-dessus.

b) Trouver la fonction f dont le graphe est une droite qui passe par l'origine et par le point I.

c) Trouver la fonction g dont le graphe est une droite parallèle au graphe de f et qui passe par le point $P(2;-1)$.

3.4.6 Les trois droites a, b et c se coupent-elles en un point ou forment-elles un triangle ?



3.4.7 Dessiner les graphes des fonctions f suivantes

a) $f(x) = x^2 - 4\,x$

b) $f(x) = 2\,x^2 - 4\,x - 2$

c) $f(x) = -x^2 + 4$

d) $f(x) = -\frac{1}{2}\,x^2 - x + 4$

3.4.8 Etudier le signe des trinômes.

a) $6\,x^2 - x - 2$

b) $8\,x^2 - 10x + 3$

c) $-x^2 + 6\,x - 9$

d) $-2\,x^2 + 7\,x + 4$

e) $25\,x^2 - 30\,x + 34$

f) $-3\,x^2 + 24\,x - 60$

g) $6\,x^2$

h) $6\,x^2 + 7\,x$

i) $8\,x^2 - 25$

j) $9\,x^2 - 42\,x + 9$

3.4.9 La hauteur h (en m) au-dessus du sol d'une fusée jouet t secondes après son lancement est donnée par $h(t) = -16\,t^2 + 120\,t$.
Quand la fusée sera-t-elle à 180 m du sol ?

3.4.10 Un train quitte une gare à 12h00 et voyage vers l'est à une vitesse de 30 km/h. A 14h00 le même jour, un deuxième train quitte la gare et voyage vers le sud à une vitesse de 25 km/h.

Trouver la fonction qui exprime la distance d en km entre les deux trains en fonction du temps t en heures, t désignant le temps pendant lequel le second train a voyagé.

3.4.11 Une balle de baseball est lancée verticalement avec une vitesse initiale de 64 m/s. Le nombre de mètre au-dessus du sol après t secondes est donné par $s(t) = -16\,t^2 + 64\,t$.

a) Quand la balle sera-t-elle à 48 m au-dessus du sol ?

b) Quand touchera-t-elle le sol ?

3.4.12 La distance qu'une voiture parcourt entre le moment où le conducteur décide de freiner et celui où la voiture s'arrête est appelée la distance de freinage. Pour une certaine voiture circulant à v km/h, la distance de freinage d (en m) est donnée par $d(v) = v + \dfrac{v^2}{20}$.

a) Calculer la distance de freinage quand v vaut 55km/h.

b) Si un conducteur décide de freiner 120 m avant un signal stop, à quelle vitesse doit-il rouler pour s'arrêter au bon endroit ?

3.4.13 Un objet est lancé verticalement vers le haut avec une vitesse initiale de v m/s ; après t secondes il est à une distance s donnée par la fonction $s(t) = v\,t - \frac{1}{2}\,g\,t^2$.
Si $g = 9.8$ m/s^2 et si la vitesse initiale est de 120 m/s, trouver :

a) le temps que met l'objet pour s'élever à 60 m au-dessus du sol

b) la hauteur maximale atteinte par l'objet et le temps requis

3.4.14 Calculer l'intersection des graphes de $f(x) = 2\,x^2 - 4\,x + 3$ et de $g(x) = 3\,x^2 - 12\,x + 18$.

3.4.15 Dessiner les graphes des fonctions

$$f(x) = x^2 - x - 6 \quad \text{et} \quad g(x) = -x^2 + 2\,x - 2$$

Résoudre ensuite les équations et inéquations ci-dessous.

a) $f(x) = 0$

b) $g(x) = 0$

c) $f(x) = g(x)$

d) $f(x) > 0$

e) $f(x) < 0$

f) $g(x) \geq 0$

g) $g(x) \leq 0$

h) $f(x) < g(x)$

i) $g(x) \leq -2$

3.4.16 Déterminer la fonction dont le graphe est une parabole

a) de sommet $S(2;5)$ et dont le graphe passe par le point $A(4;-1)$;

b) qui coupe l'axe Ox en $x=-3$ et $x=1$ et qui est tangente à la droite d'équation $y=8$;

c) qui coupe l'axe Ox en $x=-3$ et $x=1$ et qui est tangente à la droite d'équation $y=-1$;

3.4.17 Déterminer la fonction dont le graphe est une parabole de sommet $S(1;2)$ tangente à la droite $y=x$.

3.4.18 Déterminer les points d'intersection des graphes de f et de g.

a) $f(x)=x^2-5\,x+4$ et $g(x)=-4\,x+10$

b) $f(x)=x^2+x$ et $g(x)=2\,x^2-6$

3.4.19 Pour quelle(s) valeur(s) de m l'équation $x^2+m\,x+3=x$ a-t-elle exactement une solution ?

3.4.20 Déterminer pour quelle(s) valeur(s) de m le graphe de la fonction $f(x)=x^2+m\,x+5$ est tangent à la droite d'équation $y=-4$.
Donner alors les coordonnées du (des) point(s) de contact.

3.4.21 Établir le tableau des signes des fonctions suivantes.

a) $f(x)=x^3+2\,x^2-x-2$

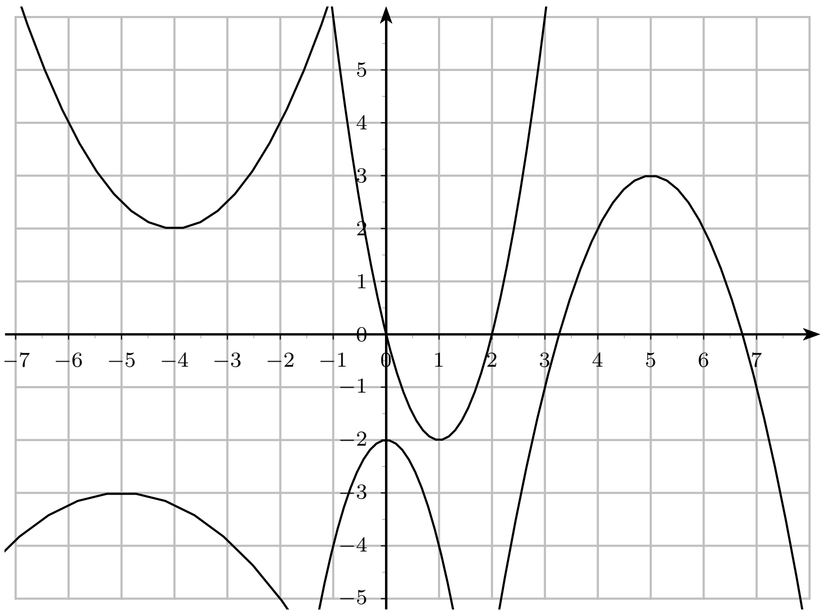
b) $f(x)=(x^3-x^2+x)\cdot(2-x)$

c) $f(x)=x^3+5\,x^2+8\,x+4$

d) $f(x)=x^3+3\,x^2+3\,x+1$

e) $f(x)=x\,(x+2)^2\cdot(2-x^2)\cdot(x^2-1)\cdot(3-2\,x)$

3.4.22 Trouver l'expression fonctionnelle des 5 fonctions dont les graphes sont les paraboles ci-dessous.



3.4.23 Résoudre les inéquations suivantes.

a) $2\,x + 5 \geq 1$
b) $5 - 2\,x \geq 1$
c) $-4\,a - 5 < a + 5$
d) $-\,(7 - 2\,x) - 8 > 0$
e) $1 - 3\,x \leq \frac{1}{3}\,x + 2$
f) $3\,(1 - x) > \frac{2}{5}\,x$

3.4.24 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation proposée dans chacun des exercices ci-dessous.

a) $-3x^2 - 42x - 147 \geq 0$
b) $-4x^2 + 24x - 42 < 0$
c) $-4x^2 + 8x + 3 < 0$
d) $x^2 + 10x + 25 > 0$
e) $4x^2 > 0$
f) $-x^2 - 6x - 9 \geq 0$
g) $-x^2 + 14x - 48 > 0$
h) $-5x^2 + 30x - 40 > 0$
i) $-5x^2 - 20x - 20 > 0$
j) $-3x^2 + 42x - 143 \geq 0$

3.4.25 Résoudre les inéquations suivantes.

a) $x^3 - 4\,x^2 + x + 6 > 0$
b) $x^5 - 5\,x^3 + 4\,x \leq 0$
c) $x^3 - x^2 - x + 1 \leq 0$
d) $(x-2)\cdot(x^2+6\,x-1) > (x^2-4)\cdot(x^2+1)$

3.4.26 Résoudre les inéquations suivantes.

a) $\dfrac{x^2-4}{x^2-x} > 0$

b) $\dfrac{x\,(2\,x-3)^2}{x^2-4} < 0$

c) $\dfrac{4\,x^2+4\,x+1}{x^2-1} > 3$

d) $\dfrac{2}{x^2} \geq 1-x$

e) $\dfrac{x-3}{x^2-3\,x+2} > 0$

f) $\dfrac{3\,x^2-7\,x-20}{x^2+4\,x-12} \leq 0$

g) $\dfrac{x+1}{x-1} \leq \dfrac{x-1}{x+1}$

h) $\dfrac{13}{2\,x+1} \geq 9-\dfrac{38}{4-x}$

i) $\dfrac{x-3}{-x^2+x-2} > 0$

j) $\dfrac{1}{x} \geq x$

k) $\dfrac{13}{2-x} \leq 7-\dfrac{4}{3\,x+1}$

l) $\dfrac{12\,x^2-13\,x-14}{x-2} < 0$

m) $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x+2} < \dfrac{1}{x+3}$

n) $\dfrac{x}{3\,x-4} \geq \dfrac{1}{4}$

o) $\dfrac{1}{x+1} \leq \dfrac{x}{(x-2)(x+3)}$

p) $\dfrac{6}{4-x}-\dfrac{1}{1-x} \leq 1$

q) $1 \leq \dfrac{3}{2\,x-1} \leq 5$

r) $-2\,x \leq \dfrac{2\,x-1}{x} < 1$

3.4.27 Étudier le signe de chacune des fonctions trinômes du second degré f définies ci-dessous.

a) $f : x \longmapsto 3x^2+18x+36$

b) $f : x \longmapsto -5x^2+60x-180$

c) $f : x \longmapsto -8x^2+48x-82$

d) $f : x \longmapsto -4x^2-80x-391$

e) $f : x \longmapsto -4x^2-16x-25$

3.4.28 Établir le tableau des signes des polynômes suivants, puis esquisser les graphes des fonctions correspondantes

a) $f(x) = x^4-x^3-11\,x^2+9\,x+18$

b) $f(x) = x^5-5\,x^4+10\,x^3-10\,x^2+5\,x-1$

3.4.29 Déterminer l'expression $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ de la fonction du 2e degré dont le graphe passe par les point A, B et C.

a) $A(-2; 29)$, $B(3; 19)$ et $C(1; 5)$

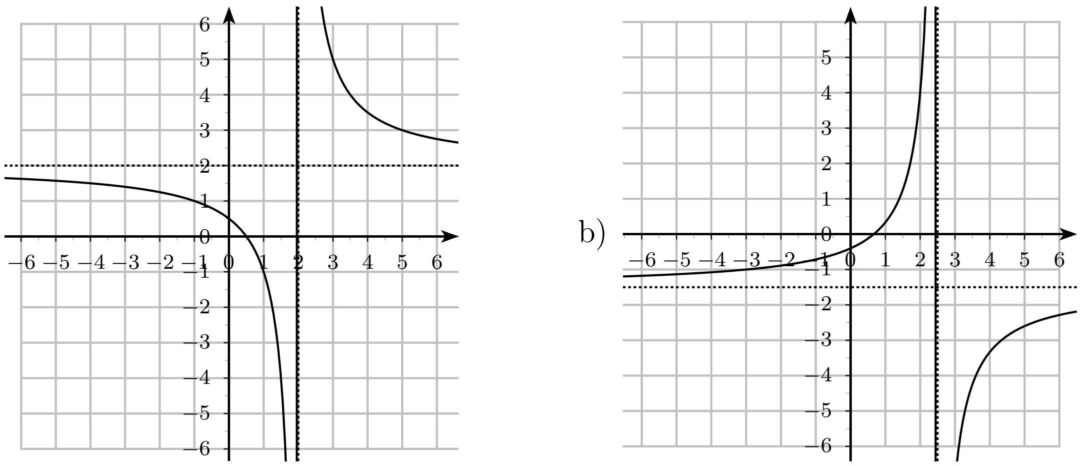
b) $A(2; -17)$, $B(-3; -72)$ et $C(-2; -37)$

3.4.30 Donner l'ensemble de définition ainsi que les points d'intersection avec les axes, faire le tableau des signes, trouver les asymptotes et esquisser le graphe des fonctions homographiques suivantes.

a) $f(x) = \dfrac{2\,x - 3}{3\,x + 2}$ b) $f(x) = \dfrac{-2\,x + 1}{x + 3}$ c) $f(x) = \dfrac{3 - 5\,x}{\frac{1}{2} + \frac{5}{3}\,x}$

3.4.31 Donner l'expression d'une fonction homographique dont le graphe est donné ci-dessous :

a) b)



On rappelle que la forme standard d'une fonction homographique est la suivante :

$$f(x) = \frac{a\,x + b}{c\,x + d}$$

3.5 Solutions des exercices

Quelques démonstrations

3.1.1 –

3.1.2 –

3.1.3 Supposons que $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$ avec p et q entiers naturels non nuls premiers entre eux.
On a alors $p^2 = 2\,q^2$ qui entraîne que p est pair, soit $p = 2p'$ et $q^2 = 2p'^2$ entraîne q pair, ce qui contredit p et q premiers entre eux.

3.1.4 –

3.1.5 On sait déjà que $\mathcal{P}$ est non vide (il contient 2). Supposons que $\mathcal{P}$ soit fini avec :

$$\mathcal{P} = \{p_1, \cdots, p_n\}$$

L'entier $z = p_1 \cdots p_n + 1$ est supérieur ou égal à 2, il admet donc un diviseur premier $p_k \in \mathcal{P}$.
L'entier p_k divise alors $z = p_1 \cdots p_n + 1$ et $p_1 \cdots p_n$, il divise donc la différence qui est égale à 1, ce qui est impossible.
En conclusion $\mathcal{P}$ est infini.

3.1.6 –

3.1.7 –

3.1.8 –

3.1.9 –

3.1.10 Non ! Si $x = -3$, $x^2 = 9$.

3.1.11 –

3.1.12

a) $\exists c \in \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = c$, ou encore plus simplement, $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(0)$.
b) $\forall c \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq c$, ou encore plus simplement, $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) \neq f(0)$.

Ensembles et intervalles

3.2.1

a) $B = \{0; 3; 6; 9\}$
b) $C = \{1; 2; 3; 4; 6; 8\}$
c) $B \cap C = \{3; 6\}$, $\quad B - C = \{0; 9\}$, $\quad \complement_A(B) \cap \complement_A(C) = \{5; 7\}$

3.2.2

a) $A = \{-1; 0\}$
b) $B = \mathbb{Z}$
c) $C = \{-3; 1\}$
d) $D = \{-5; -4; -3; -2; -1\}$
e) $E = \{-1; 0; 1\}$

3.2.3 $A = \{1; 2; 3\}$, $B = \{5; 7\}$, $C = \{4\}$, $D = \{6; 8; 9; 10\}$.

3.2.4 $E = \{1; 3; 4; 6\}$

3.2.5 $A = \{2; 4; 6\}$, $B = \{1; 3; 5\}$

3.2.6 $A = \{1; 3; 4\}$, $B = \{1; 3\}$, $C = \{2; 3; 4\}$

3.2.7

a) $A = [-3 \ ; \ 5]$
b) $B = [4 \ ; \ 5[$
c) $C =]-\infty \ ; \ 1[$
d) $D = [10 \ ; \ +\infty[$
e) $E = [-2 \ ; \ 2]$
f) $F =]-\infty \ ; \ +\infty[$
g) $G = [2 \ ; \ 2]$

3.2.8

a) $A = \{0 \ ;1 \ ;2\}$ et $B = \{3 \ ;4\}$ par exemple
b) $A = \{0 \ ;2 \ ;3 \ ;4\}$ et $B = \{1 \ ;2 \ ;3 \ ;4\}$ par exemple

3.2.9

a) $[-2; 0[$ $[-3; 3]$ $]3; 4[$ $[-3; -2[\cup [0; 4[$
b) $[-2; 2]$ $]-3; 1[$ $]-4; -3]$ $]-4; -2[\cup [1, 2]$
c) $]-1; 3[$ $[-3; 3[$ $]-5; -3[$ $]-5; -1]$

Généralités sur les fonctions

3.3.1

a) $f(D) = \{-11; -8; -5; -2; 1\}$
b) $f(D) = \{-3; -2; 1\}$
c) $f(D) = \{-\frac{1}{2}; -\frac{2}{3}; -\frac{3}{4}; -\frac{4}{5}; -\frac{5}{6}\}$
d) $f(D) = \{-\frac{1}{5}; 0; 1; \frac{3}{5}\}$

3.3.2

a) oui
b) non
c) non
d) oui
e) non
f) non
g) oui
h) non
i) non
j) non

3.3.3 –

3.3.4 –

3.3.5 –

Etude d'une fonction

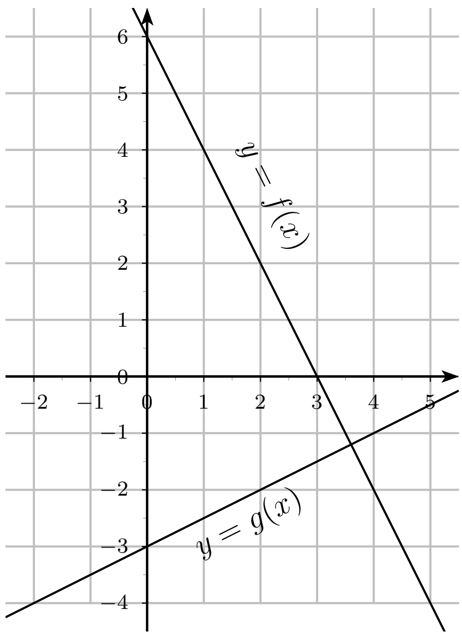
3.4.1

a) $D = \mathbb{R} - \{3\}$
b) $D = \mathbb{R} - \{3\}$
c) $D = \mathbb{R} - \{-5\}$
d) $D = \mathbb{R} - \{-2; 2\}$
e) $D = \mathbb{R}$
f) $D = \mathbb{R} - \{-1; 0\}$
g) $D = \mathbb{R} - \{-4; 3\}$
h) $D = \mathbb{R} - \{-2\}$
i) $D = [1; +\infty[$
j) $D =]-5; +\infty[$
k) $D =]-\infty; 2]$
l) $D = \left]-\infty; \frac{1}{2}\right]$

3.4.2

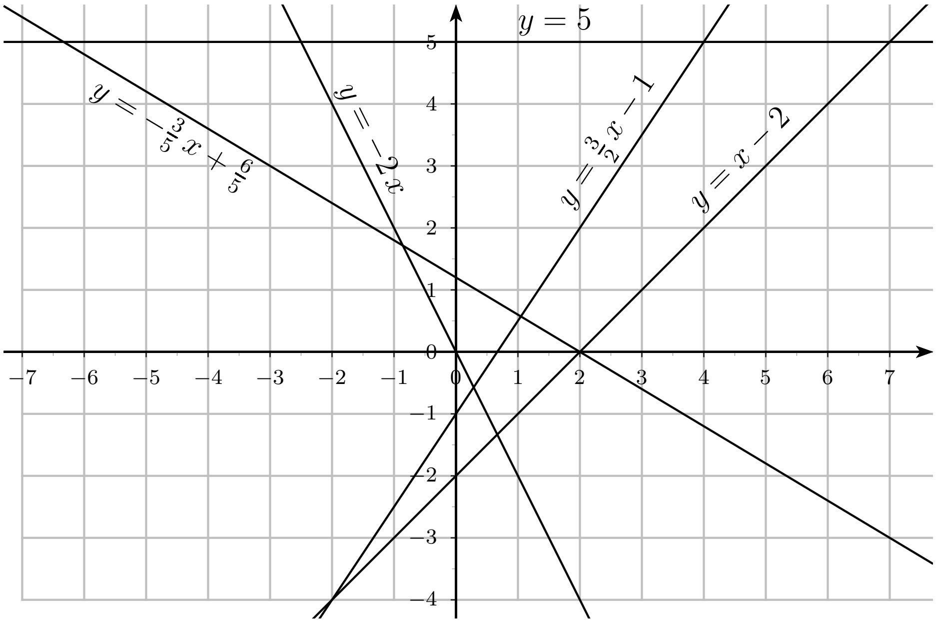
a) $f(0) = -1.5$
b) $f(-2) = -3.2$
c) $f(x) = 0 \iff x \in \{-3; 4, 2\}$
d) $f(x) = 2 \iff x \in \{-3.3; 4.8\}$
e) si $a = -3.5$
f) $f(x) = x \iff x \in \{-2.4; 5.3\}$
g) $f(x) = -x \iff x \in \{-3.5; 0.7\}$

3.4.3



a) $x = 3$
b) $x = \frac{18}{5}$
c) $x = 2$
d) $x > 3$
e) $x < \frac{18}{5}$
f) $x \leq 2$

3.4.4



3.4.5

a) $I\left(\frac{17}{11}; \frac{14}{11}\right)$

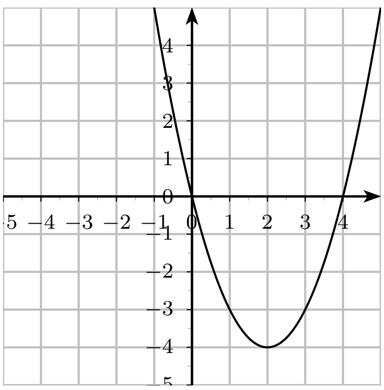
b) $f(x) = \frac{14}{17}\,x$

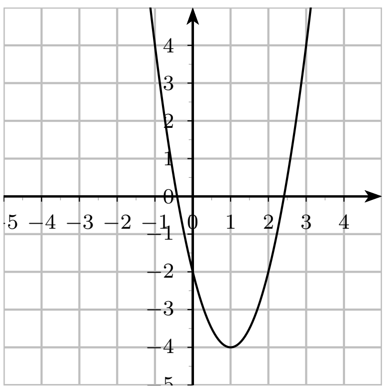
c) $g(x) = \frac{14}{17}\,x - \frac{45}{17}$

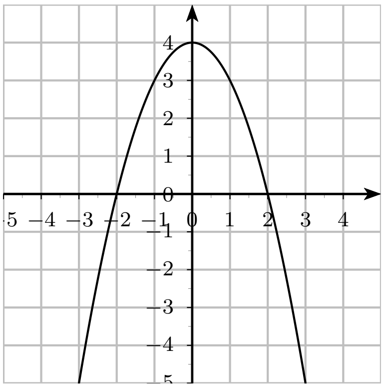
3.4.6

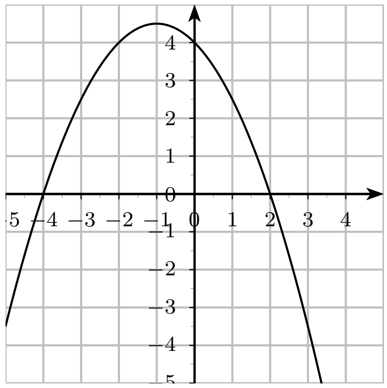
Elles forment un triangle.

3.4.7

a) 

b) 

c) 

d) 

3.4.8 –

3.4.9
La fusée est donc 180 m au-dessus du sol au temps suivant : $t = \frac{15-3\sqrt{5}}{4} \cong 2.07s$ et $t = \frac{15+3\sqrt{5}}{4} \cong 5.43s$

3.4.10 $d(t) = 5\sqrt{61\,t^2 + 144\,t + 144}$

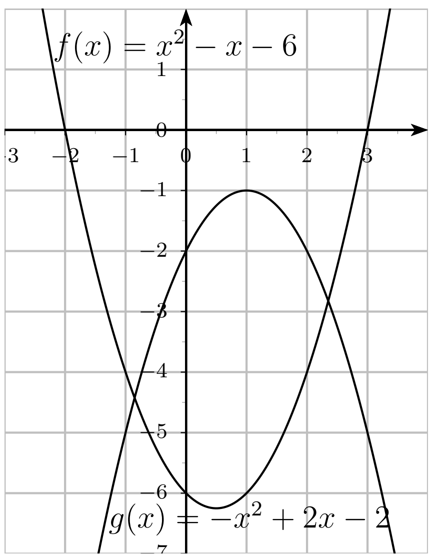
3.4.11
a) Après 1 s et après 3 s ; b) Après 4 s

3.4.12
a) 206.25 m ; 40 km/h

3.4.13
a) $t = 0.51$ s et $t = 23.98$ s

b) hauteur maximale : 734.69 m et le temps requis : 12.24 s

3.4.14
$I_1(3; 9)$ et $I_2(5; 33)$

3.4.15


a) $x_1 = -2$, $x_2 = 3$
b) Pas de solution
c) $x_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{41}}{4}$
d) $S = \left]-\infty\ ;\ -2\right[\cup \left]3\ ;\ +\infty\right[$
e) $S = \left]-2\ ;\ 3\right[$
f) $S = \{\,\}$
g) $S = \mathbb{R}$
h) $S = \left]\dfrac{3-\sqrt{41}}{4}\ ;\ \dfrac{3+\sqrt{41}}{4}\right[$
i) $S = \left]-\infty\ ;\ 0\right] \cup \left[2\ ;\ +\infty\right[$

3.4.16

a) $y = -\frac{3}{2}(x-2)^2 + 5$
b) $y = -2(x+3)\cdot(x-1)$
c) $y = \frac{1}{4}(x+3)\cdot(x-1)$

3.4.17

$y = \frac{1}{4}(x-1)^2 + 2$

3.4.18

a) $I(-2;18)$ et $J(3;-2)$
b) $I(-2;2)$ et $J(3;12)$

3.4.19

$m_1 = 1 + \sqrt{12}$, $m_2 = 1 - \sqrt{12}$

3.4.20 $a_1 = 6$, point de contact $(-3;-4)$, $a_2 = -6$, point de contact $(3;-4)$

3.4.21

a)

x		-2		-1		1	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

b)

x		0		2	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

c)

x		-2		-1	
$f(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$

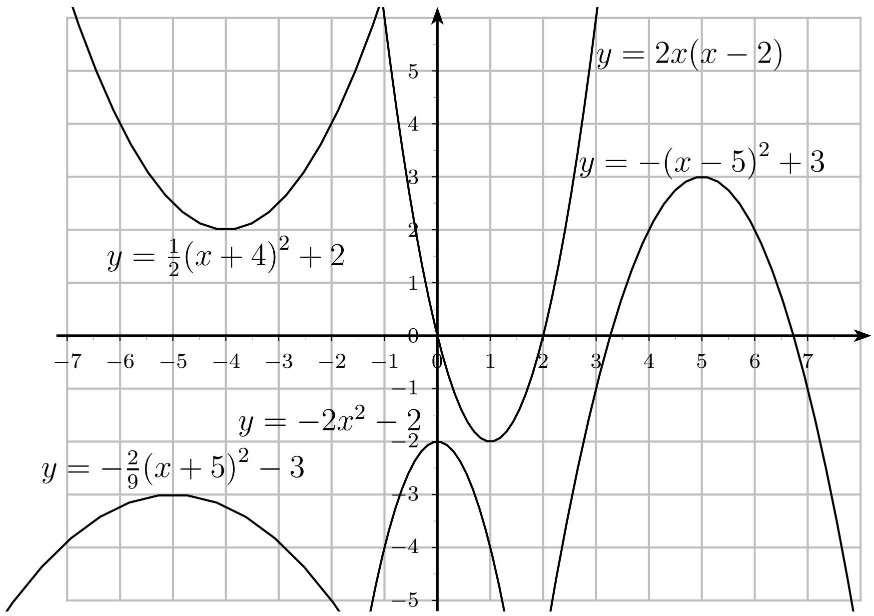
d)

x		-1	
$f(x)$	$-$	0	$+$

e)

x		-2		$-\sqrt{2}$		-1		0		1		$\sqrt{2}$		$\frac{3}{2}$	
$f(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

3.4.22



3.4.23

a) $x \geq -2$

b) $x \leq 2$

c) $a > -2$

d) $x > \frac{15}{2}$

e) $x \geq -\frac{3}{10}$

f) $x < \frac{15}{17}$

3.4.24

a) $S = \{-7\}$

b) $S = \mathbb{R}$

c) $S = \left]-\infty; \frac{1}{2}\left(2-\sqrt{7}\right)\right[\cup \left]\frac{1}{2}\left(2+\sqrt{7}\right); +\infty\right[$

d) $S =]-\infty; -5[\cup]-5; +\infty[$

e) $S =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$

f) $S = \{-3\}$

g) $S =]6; 8[$

h) $S =]2; 4[$

i) $S = \varnothing$

j) $S = \left[\frac{1}{3}\left(21-2\sqrt{3}\right); \frac{1}{3}\left(21+2\sqrt{3}\right)\right]$

3.4.25

a) $x \in \,]-1\,;\,2\,[\,\cup\,]\,3\,;\,+\infty\,[$

b) $x \in \,]-\infty\,;\,-2\,]\,\cup\,[\,-1\,;\,0\,]\,\cup\,[\,1\,;\,2\,]$

c) $x \in \,]-\infty\,;\,-1\,]\,\cup\,\{\,1\,\}$

d) $x \in \,]-3\,;\,1\,[\,\cup\,]\,1\,;\,2[$

3.4.26

a) $S =]-\infty; -2[\cup]0; 1[\cup]2; +\infty[$

b) $S =]-\infty; -2[\cup]0; \frac{3}{2}[\cup]\frac{3}{2}; 2[$

c) $S =]-\infty; -2[\cup]-2; -1[\cup]1; +\infty[$

d) $S = [-1; 0[\cup]0; +\infty[$

e) $S =]1; 2[\cup]3; +\infty[$

f) $S =]-6; -\frac{5}{3}] \cup]2; 4]$

g) $S =]-\infty; -1[\cup [0; 1[$

h) $S =]-\frac{1}{2}; 4[$

i) $S =]-\infty; 3[$

j) $S =]-\infty; -1] \cup]0; 1]$

k) $S =]-\infty; -\frac{1}{3}[\cup]2; +\infty[$

l) $S =]-\infty; -\frac{2}{3}[\cup]\frac{7}{4}; 2[$

m) $S =]-\infty; -3-\sqrt{2}[\cup]-3; -2[\cup]-3+\sqrt{2}; -1[$

n) $S =]-\infty; -4] \cup]\frac{4}{3}; +\infty[$

o) $S =]-3; -1[\cup]2; +\infty[$

p) $S =]-\infty; 1[\cup]4; +\infty[$

q) $S = [\frac{4}{5}; 2]$

r) $S = [\frac{\sqrt{3}-1}{2}; 1[$

3.4.27

a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) > 0$

b) Le signe de f est donné par le tableau suivant.

x	$-\infty$		6		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$-$	

c) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) < 0$.

d) Le signe de f est donné par le tableau suivant.

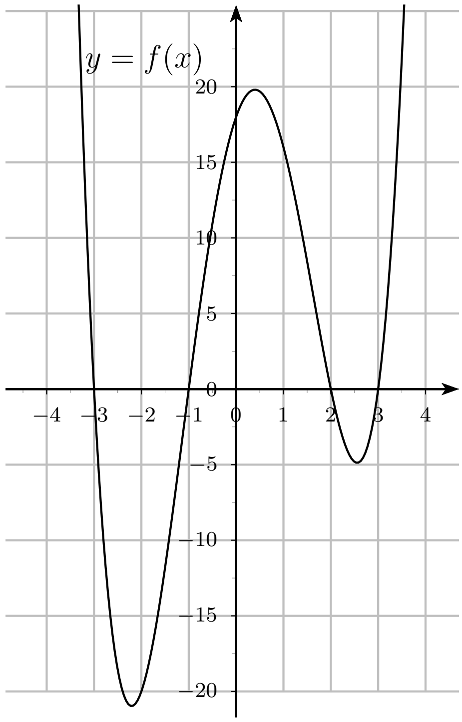
x	$-\infty$		$-\frac{23}{2}$		$-\frac{17}{2}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

e) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) < 0$.

3.4.28

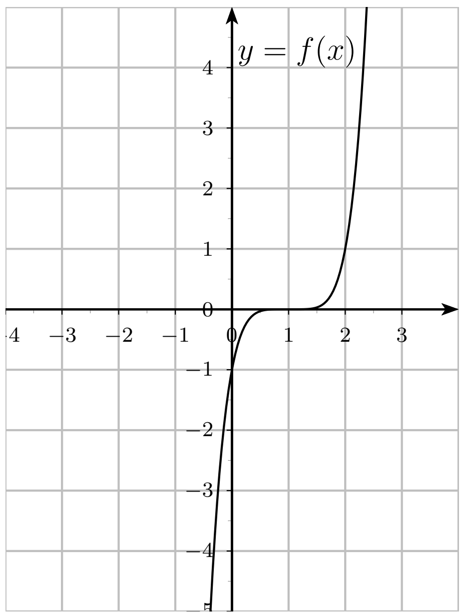
a)

x		-3		-1		2		3	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$



b)

x		1	
$f(x)$	$-$	0	$+$



3.4.29

a) $f(x) = 3\,x^2 - 5\,x + 7$

b) $f(x) = -6\,x^2 + 5\,x - 3$

3.4.30

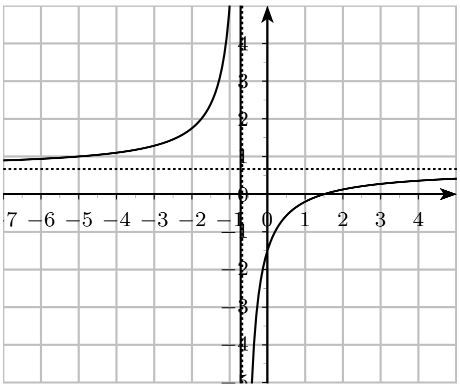
a) $D = \mathbb{R} - \left\{-\frac{2}{3}\right\}$

Points sur les axes : $(\frac{3}{2}; 0)$ et $(0; -\frac{3}{2})$

Tableau des signes :

x		$-\frac{2}{3}$		$\frac{3}{2}$	
$f(x)$	$+$	‖	$-$	0	$+$

Asymptotes : $x = -\frac{2}{3}$ $\quad y = \frac{2}{3}$



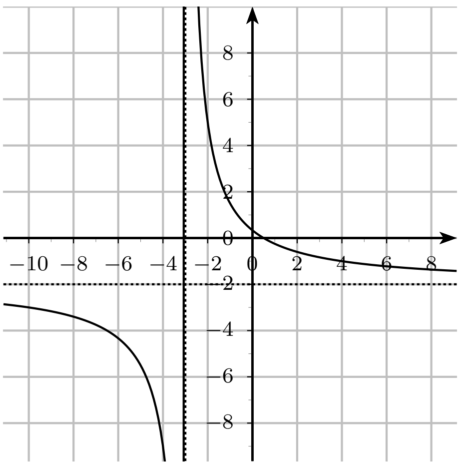
b) $D = \mathbb{R} - \{-3\}$

Points sur les axes : $(\frac{1}{2}; 0)$ et $(0; \frac{1}{3})$

Tableau des signes :

x		-3		$\frac{1}{2}$	
$f(x)$	$-$	‖	$+$	0	$-$

Asymptotes : $x = -3$ $\quad y = -2$



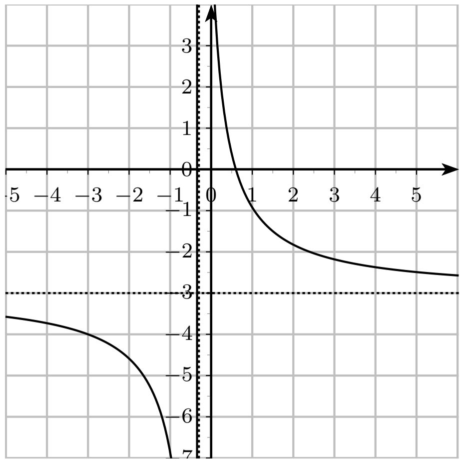
c) $D = \mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{10}\right\}$

Points sur les axes : $(\frac{3}{5}; 0)$ et $(0; 6)$

Tableau des signes :

x		$-\frac{3}{10}$		$\frac{3}{5}$	
$f(x)$	$-$	‖	$+$	0	$-$

Asymptotes : $x = -\frac{3}{10}$ $\quad y = -3$



3.4.31

a) $f(x) = \dfrac{2\,x-1}{x-2}$

b) $f(x) = \dfrac{-3\,x+2}{2\,x-5}$

Chapitre 4

Trigonométrie

4.1 La mesure des angles

4.1.1 Convertir en degrés les angles donnés par leur mesure en radians

a) $\pi/6$

b) $2\,\pi/3$

c) $7\pi/10$

d) $4\,\pi$

e) $-5\,\pi/6$

f) $15\,\pi/6$

g) 1

h) 0.7

i) -2

j) 3

4.1.2 Convertir en radians les angles donnés par leur mesure en degrés

a) $45°$

b) $60°$

c) $75°$

d) $-30°$

e) $120°$

f) $315°$

g) $22.7°$

h) $-107.9°$

i) $292.3°$

j) $152.5°$

4.1.3 Calculer, à 1 mm près, le rayon d'un cercle sur lequel

a) un arc de $1°$ mesure 3 mm.

b) un arc de $0.03°$ mesure 0.05 mm.

4.1.4 Calculer, à 1 mm près, la longueur d'un arc

a) de $32°$ sur un cercle de rayon 15 cm.

b) de 2 rad sur un cercle de rayon 7cm.

4.1.5

a) Deux points distincts sur le même méridien terrestre ont des latitudes qui diffèrent de $\frac{1}{60}$ degré (ou 1 minute d'arc). Quelle est leur distance (cette distance définit le mille nautique) sachant que le rayon de la terre est de 6370 km ?

b) Peut-on poser la même question pour deux points situés sur un même parallèle dont les longitudes diffèrent ?

4.1.6 Bulle et Porrentruy se trouvent sur le même méridien terrestre. Leurs latitudes respectives sont $46\,°37'$N et $47\,°25'$N. Calculer la distance «à vol d'oiseau » entre ces deux villes.

4.1.7 Sion et Delémont se trouvent sur le même méridien terrestre. Leur distance «à vol d'oiseau » est de 123 km. Sachant que la latitude de Sion est de $46\,°14'$N, calculer la latitude de Delémont.

4.1.8 Dunkerque et Barcelone se trouvent sur le même méridien terrestre. Leurs latitudes respectives sont $49°45'$N et $40°15'$N. Calculer la distance «à vol d'oiseau » entre ces deux villes.
La mesure de la distance entre Dunkerque et Barcelone s'est faite par triangulation entre 1792 et 1798. Elle a servi de base à la première définition du mètre comme la dix millionième partie du quart de méridien terrestre.

4.1.9 Deux points A et B de la surface terrestre sont situés sur le même méridien et distants de 800 km. Lorsque le Soleil est à la verticale de A, les rayons du Soleil forment avec la verticale, en B, un angle de 7.2°
En déduire la circonférence et le rayon terrestre.
Cette méthode a été imaginée par Eratosthène (284-195 av. J.-C.) après avoir appris que, un certain jour de l'année à midi, le Soleil se réfléchit verticalement dans un puits profond près de Syène (aujourd'hui Assouan) qui correspondait au point A. Le point B était Alexandrie, située à 800 km au nord de Syène. Pour déterminer l'angle à midi, on mesurait l'ombre d'un pilier vertical.

4.1.10 Le diamètre d'un cercle mesure 48 cm. Trouver la longueur de l'arc et la surface du secteur circulaire défini par un angle au centre de 20°.

4.1.11 Deux points A et B situés sur le même méridien terrestre ont des latitudes qui diffèrent de 2°. Quelle est la distance entre ces deux points ? Rayon de la terre : $6'350$ km.

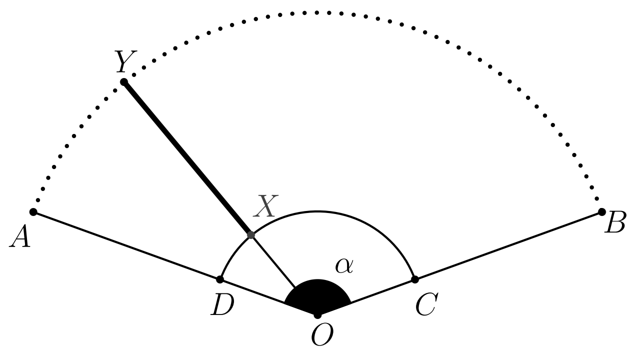
4.1.12 La terre effectue une rotation complète après 23 h 56 min 4 s. Calculer de combien de degrés la terre tourne en une seconde. On donne le rayon de la terre : $6'350$ km.

4.1.13 Une roue tourne à la vitesse de 48 tours/minute. Exprimer cette vitesse angulaire en :

a) tours/seconde b) degrés/seconde

4.1.14 Un pneu de voiture mesure 75 cm de diamètre. A quelle vitesse angulaire en tours/minute la roue tourne-t-elle sur son axe si la voiture roule à 72 km/h ?

4.1.15 Un essuie-glace mesure 40 cm de long de son point de rotation O à son extrémité Y et balaie sur une longueur de 30 cm, entre les points X et Y.



On suppose que l'angle d'oscillation α mesure $140°$.

a) Calculer la longueur en cm de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ parcouru par l'extrémité Y du balai d'essuie-glace durant une oscillation de gauche à droite.
b) Calculer l'aire en cm^2 de la surface $ABCD$ balayée par l'essuie-glace XY .

4.2 Le triangle rectangle

4.2.1 Un triangle rectangle ABC est rectangle en A. Résoudre ce triangle connaissant :

a) $\gamma = 32°$ et $BC = 10$ b) $\beta = 32°$ et $BC = 5$ c) $\gamma = 27°$ et $AB = 10$

d) $AC = 6$ et $AB = 10$ e) $\gamma = 64°$ et $AC = 12$ f) $\beta = 45°$ et $BC = 12$

4.2.2 Dans un triangle ABC rectangle en B, on donne $\gamma = 27°$ et $AB = 40$ cm. Calculer les longueurs BC, CH et HA où H est le pied de la hauteur sur AC issue de B.

4.2.3 Quelle est la hauteur d'un clocher qui a une ombre de 36 m lorsque le soleil est élevé de $37.5°$ au-dessus de l'horizon ?

4.2.4 Une route en ligne droite fait un angle de 2.3° avec sa projection horizontale. Quel chemin faut-il parcourir pour s'élever de 109.20 m au-dessus du niveau du point de départ ?

4.2.5 La voûte d'un tunnel est un arc de cercle d'angle au centre 220°. Calculer le rayon r de cet arc de cercle pour que la largeur de la route soit de 12 m, ainsi que la hauteur maximum de la voûte au-dessus du sol.

4.2.6 Déterminer le périmètre et l'aire du pentagone régulier inscrit dans un cercle de rayon 6 cm.

4.2.7 Quel est le rayon d'un cercle dans lequel une corde de 18.40 cm sous-tend un arc de 48° ?

4.2.8 De mon balcon situé à 9 m au-dessus du sol, j'observe l'immeuble d'en face. Pour voir le bas de l'immeuble, je dois baisser les yeux d'un angle de 20°, alors que pour en voir le sommet, je dois lever les yeux d'un angle de 10°. Quelle est la hauteur de l'immeuble d'en face ?

4.2.9 Natacha se trouve à 9 m d'un peuplier qu'elle aperçoit sous un angle de 58° (on néglige la hauteur des yeux par rapport au sol). Sous quel angle le verra-t-elle si elle recule de 30 m ?

4.2.10 Couché par terre à Ouchy, j'observe le jet d'eau de Genève. J'en vois une portion de 24 m de haut. Sachant que la distance d'Ouchy au pied du jet d'eau est de 50 km, mesurée à la surface du lac et que le rayon de la terre est de 6′350 km, quelle est la hauteur du jet d'eau ?

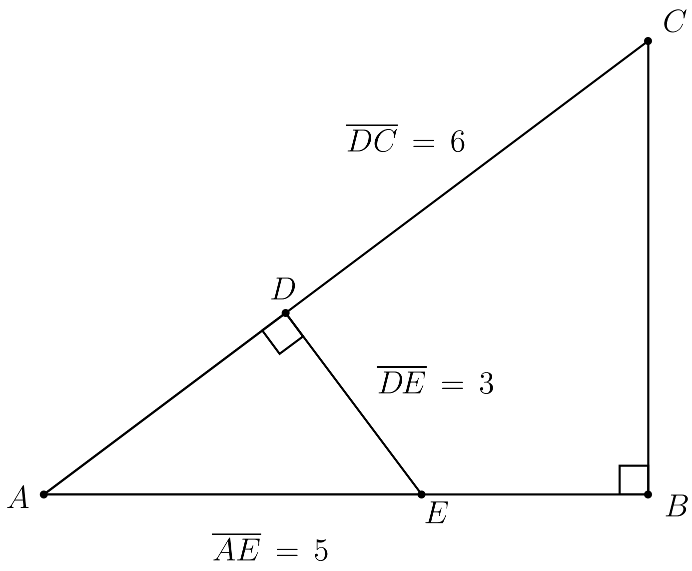
4.2.11 Considérons un cube $ABCDEFGH$ de longueur d'arête égale à 6 cm. Soit J le milieu de FG et I le milieu de BC.

a) Calculer la mesure des angles $\widehat{JAI}$, $\widehat{JAB}$ et $\widehat{JAD}$,

b) Calculer la longueur d'une des diagonales du cube.

4.2.12 Un cône de révolution dont le rayon de base vaut 6 cm est inscrit dans une sphère de rayon 10 cm. Calculer l'angle au sommet du cône, ainsi que l'angle au sommet de son développement.

4.2.13 En utilisant les informations données sur le dessin ci-dessous, calculer toutes les dimensions manquantes et tous les angles déterminés par la figure.

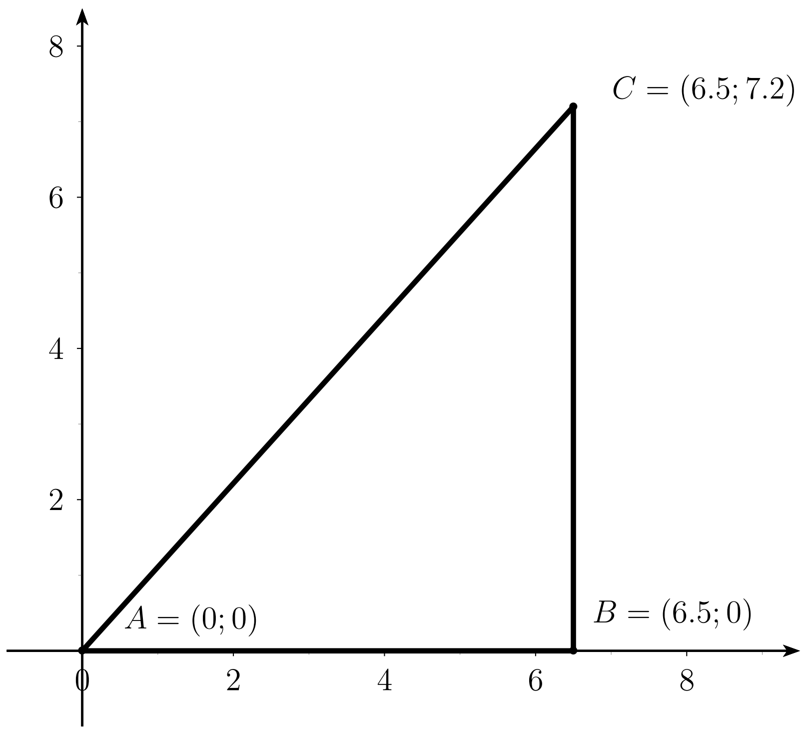


4.2.14 Une échelle de 4 m de long est appuyée contre la façade d'un bâtiment et l'angle entre l'échelle et le bâtiment est de 22°.

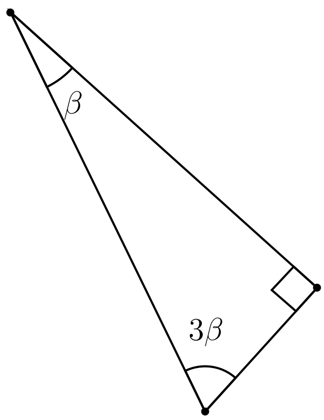
a) Calculer la distance entre le pied de l'échelle et le mur.

b) Si la distance entre le pied de l'échelle et le mur augmente de 1 m, de combien le point d'appui de l'échelle contre le mur va-t-il descendre ?

4.2.15 Le triangle ABC est-il rectangle ? Si c'est le cas, calculer la longueur $\overline{AC}$.



4.2.16 D'un triangle rectangle, on sait qu'un angle aigu est égal au triple de l'autre angle aigu.



a) Quelle est la mesure de chacun des trois angles ?

b) Si le petit côté adjacent à l'angle droit mesure 10 unités, quelle est la longueur des deux autres côtés ?

4.2.17 L'angle d'élévation du sommet d'une tour verticale est de 43° à 72 m de la tour, l'oeil de l'observateur étant à 1.10 m au dessus du sol. Quelle est la hauteur de cette tour ?

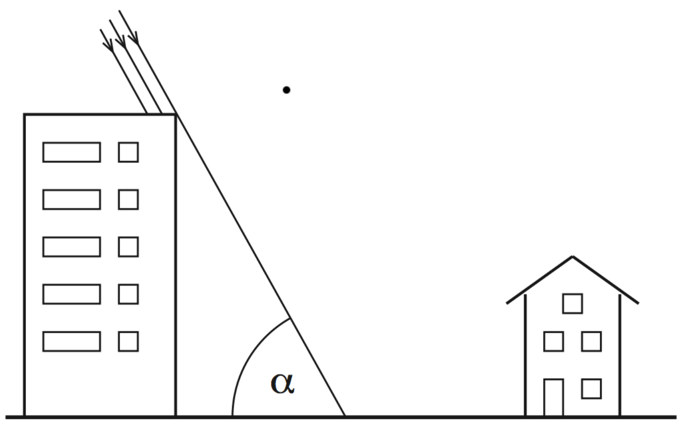
4.2.18 L'angle d'élévation du sommet d'une tour verticale dont le pied est inaccessible est 24° ; on s'avance de 32 m vers la tour sur une horizontale, et l'angle d'élévation du sommet est alors égal à 40°. On sait encore que l'oeil de l'observateur est élevé de 1.5 m. Quelle est la hauteur de la tour ?

4.2.19 Mesurer la distance d'un point A à un autre B inaccessible. On a pris une base AC, perpendiculaire à AB et longue de 80 m. L'angle formé au point C par les rayons visuels menés en A et en B égale 48°.

4.2.20 Deux observateurs, distants de 1750 m sur une horizontale, mesurent au même instant les hauteurs d'un point remarquable d'un nuage. Ce point est dans le plan vertical de la base d'observation, et les angles d'élévation sont 72° et 84°. Quelle est la hauteur du nuage s'il se trouve entre les deux observateurs ?

4.2.21 Une personne placée au bord d'une rivière voit sous un angle de 60° un arbre planté sur la rive opposée ; lorsqu'elle s'éloigne de 40 m, cet angle n'est plus que 20°. Quelle est la hauteur de l'arbre et la largeur de la rivière ?

4.2.22 Un propriétaire apprend que l'on va construire un immeuble de 20 m de haut à 40 m de sa maison (distance entre les deux murs les plus proches de l'immeuble et de la maison) ; on note α l'angle que forment les rayons du soleil avec le sol.



a) On suppose que $\alpha = 72°$; calculer la longueur (au cm près) de l'ombre de l'immeuble et vérifier que cette ombre ne touche pas la maison.

b) On suppose que $\alpha = 22°$; montrer par calculs que l'ombre de l'immeuble touche la façade la plus proche de la maison et calculer la hauteur maximale atteinte par l'ombre sur cette façade.

4.2.23 La grande pyramide de Chéops est une pyramide régulière dont la base est un carré auquel les égyptiens donnèrent des dimensions telles que l'on pouvait en parcourir un côté en 140 tours d'une roue d'une coudée royale de diamètre (une coudée royale mesure environ 0,524 m). Quant à la hauteur, elle mesurait 280 coudées royales. Calculer :

a) La longueur du côté de la base et celle des arêtes latérales de la pyramide (au cm près).

b) L'angle que les faces de la pyramide forment avec le sol.

4.2.24 Un bras de robot peut tourner autour de l'origine d'un repère Oxy (unité : le cm) et peut également varier en longueur.

a) La main du bras du robot se trouve au départ au point P de coordonnées $P(-50\,;\,0)$. Le bras du robot tourne alors d'un angle $\alpha = -205°$ et s'allonge de 10 cm. Quelles seront les coordonnées (au mm près) du point Q où se trouve la main du robot après ces deux opérations ?

b) La main du bras du robot se trouve au départ au point R de coordonnées $R(-20\,;\,48)$ et à la fin au point S de coordonnées $S(40\,;\,-30)$. De quel angle (à 0.1° près et avec son signe) le bras du robot a-t-il tourné et de combien la longueur du bras a-t-elle varié ?

4.3 Le cercle trigonométrique

4.3.1 Déterminer les valeurs exactes des rapports trigonométriques des angles de 45°, 30° et 60°.

4.3.2 Donner les expressions suivantes en fonction de t uniquement :

a) $\cos(270° + t)$

b) $\sin(-t - 270°)$

c) $\sin(t - 270°)$

d) $\cos(t - 270°)$

e) $\cos(-\dfrac{19\,\pi}{2} - t)$

f) $\sin(t + \frac{\pi}{2})\,\cos(\pi - t) - \cos(\frac{\pi}{2} - t)\,\sin(t)$

4.3.3 Résoudre les équations suivantes en donnant les solutions en degrés.

a) $\cos(t) = -\frac{1}{2}$

b) $\sin(t) = 0.829$

c) $\tan(t) = -0.754$

d) $\cos(t) = -1.43$

e) $\tan(t) = 5.33$

f) $\sin(3\,t) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

g) $\tan(5\,t) = 3.273$

h) $\cos\left(\frac{t}{2}\right) = -\frac{1}{2}$

4.3.4 Résoudre les équations suivantes en donnant les solutions en radians.

a) $\sin\left(\frac{2\,t}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\cos\left(\frac{t}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$

c) $\sin(3\,t)=\sin(2\,t)$

d) $\cos(2\,t)=\cos(4\,t)$

e) $\sin(2\,t)=\cos\left(3\,t+\frac{\pi}{4}\right)$

f) $\sin\left(\frac{4\,t}{3}\right)+\cos\left(\frac{t}{2}\right)=0$

g) $\tan(3\,t)=\cot(t)$

h) $\cos(2\,t)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-4\,t\right)$

4.3.5 Résoudre les équations suivantes.

a) $4\,\cos^2(t)-4\,\cos(t)-3=0$

b) $2\,\sin^2(x)-3\,\sin(x)+1=0$

c) $3\,\sin^2(z)+8\,\cos(z)+1=0$

d) $3\,\sin^2(t)+\cos^2(t)-2=0$

e) $5\,\sin(x)=6\,\cos^2(x)$

f) $\cos(x)=\tan(x)$

g) $8\,\cos^2(t)+5\,\sin(t)-1=0$

h) $\tan^4(t)-4\,\tan^2(t)+3=0$

4.3.6 Résoudre les équations suivantes.

a) $3\,\cos(x)+2\,\sin(x)=-3$

b) $\sin(t)+3\,\cos(t)=3$

c) $\sin(x)-\cos(x)=\sqrt{2}$

d) $\sqrt{3}\,\cos(t)-\sin(t)=1$

e) $3\,\sin(t)+5\,\cos(t)=2$

f) $\sin(2\,x)+3\,\cos(2\,x)=2$

4.3.7 Résoudre les équations suivantes en utilisant la relation $\tan(x)=\sin(x)/\cos(x)$ pour obtenir une équation en $\tan(x)$.

a) $\sin(t)=3\,\cos(t)$

b) $\sin(\alpha)\cdot\cos(\alpha)-2\,\sin^2(\alpha)=0$

c) $\sin^2(t)-4\,\sin(t)\cdot\cos(t)+3\,\cos^2(t)=0$

d) $1-2\,\sin(x)\cdot\cos(x)-2\,\cos^2(x)=0$

e) $\cos^2(\varphi)+4\,\sin(\varphi)\cdot\cos(\varphi)-5\,\sin^2(\varphi)=0$

f) $5\,\sin^2(2\,t)+3\,\sin(t)\cdot\cos(t)-4=0$

4.3.8 Résoudre les équations suivantes en utilisant la relation $\tan(x) = \sin(x)/\cos(x)$ pour obtenir une équation en $\tan(x)$.

a) $\sin(2\,t) = \tan(t)$

b) $\cos(2\,x) + 2\,\sin(x) \cdot \cos(x) = 0$

c) $\sin(x) \cdot \cos(2\,x + \pi/3) = \sin^2(x)$

d) $1 + \sin(x) = \cos(2\,x)$

4.4 Le triangle quelconque

4.4.1 On aimerait construire un triangle ABC dont

- le côté a mesure 7 cm ;
- l'angle β vaut 52°.

Quelle mesure faut-il donner au côté b pour

a) qu'il soit possible de construire deux triangles différents ?

b) qu'il n'y ait qu'un seul triangle constructible ?

c) que la construction ne soit pas possible ?

Illustrer les trois cas ci-dessus à l'aide d'un dessin à la règle et au compas. Rédiger la marche à suivre de la construction du point b).

4.4.2 Est-il possible de construire un triangle rectangle ABC dont l'hypoténuse mesure 7.5 cm et dont l'un des côtés adjacent à l'angle droit mesure 3.9 cm ?

4.4.3 Construire les triangles ABC dont on connaît :

a) $a = 6$ cm $\quad b = 5$ cm $\quad \beta = 45°$

b) $c = 8$ cm $\quad \beta = 30° \quad \gamma = 120°$

4.4.4 Chaque ligne du tableau ci-dessous donne des informations sur un triangle ABC quelconque On sait que l'on a mesuré les longueurs en centimètres et les angles en degrés.

	a	b	c	α	β	γ	$\mathcal{A}$
a)	5	6	7				
b)	5	7		35			
c)	4	9				54	
d)			8	40	80		
e)	6	5					12
f)		4		70			10

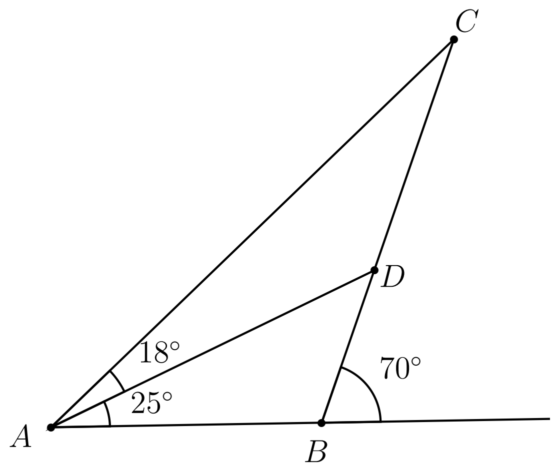
a) En utilisant uniquement les informations données dans le tableau ci-dessus avant qu'il ne soit complété, construire les triangles des points a), c) et d) à l'aide de la règle et du compas, en utilisant un rapporteur pour tracer les angles si nécessaire. Rédiger la marche à suivre de chaque construction.

b) Compléter le tableau par calcul.

4.4.5 Après avoir construit chaque triangle donné par les éléments ci-dessous, le résoudre :

a) $a = 8$, $b = 11$ et $\beta = 14°$ b) $b = 11$, $c = 9$ et $\gamma = 22°$ c) $a = 11$, $c = 12$ et $\alpha = 154°$

4.4.6 Calculer la longueur des segments BC, BD, AD et AB, sachant que la longueur du segment AC vaut 88 cm.



4.4.7 Un triangle ABC est donné par $a = 26.4$, $b = 16.2$ et $c = 20.7$. Calculer le rayon du cercle circonscrit au triangle.

4.4.8 D'un quadrilatère convexe $ABCD$, on donne l'angle en A : 110°, ainsi que les longueurs des quatres côtés : $AB = 3$, $BC = 6$, $CD = 6$ et $DA = 5$. Calculer l'aire et les angles du quadrilatère.

4.4.9 Sur la diagonale AC d'un rectangle $ABCD$, on considère un point O tel que $\widehat{BOC} = 57°$. Sachant que $AB = 36$ et $AO = 24$, calculer BC.

4.4.10 Pour déterminer l'altitude du sommet C d'une montagne, on choisit deux points

A et B distants de d mètres. On mesure les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{ABC}$ ainsi que l'angle d'élévation θ sous lequel on voit C depuis A. Quelle est l'altitude de C si celle de A vaut h ?

Application numérique : $d = 400$ m, $h = 1'000$ m, $\widehat{BAC} = 35°$, $\widehat{ABC} = 110°$ et $\theta = 20°$.

4.4.11 Montrer que l'aire d'un triangle ABC est égale à :

a) $\mathcal{A} = \dfrac{abc}{4r}$,

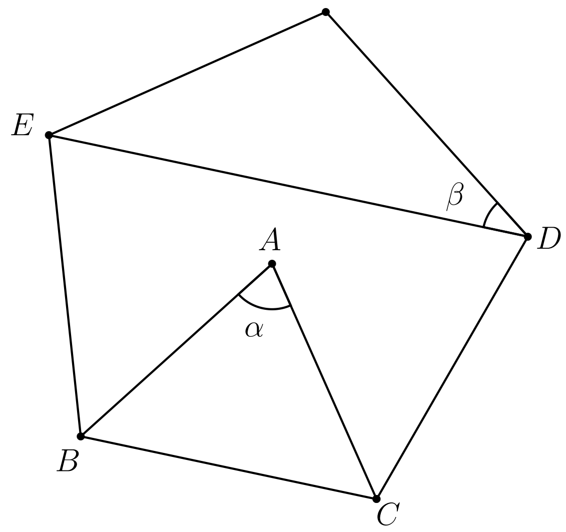
b) $\mathcal{A} = 2r^2 \sin(\alpha)\sin(\beta)\sin(\gamma)$,

où r désigne le rayon du cercle circonscrit au triangle.

4.4.12 On a tracé ci-dessous un pentagone régulier dont le côté mesure 4 cm. Le point A est le centre du pentagone.

a) Calculer la valeur des angles α et β.

b) Calculer la longueur des segments AB et DE.



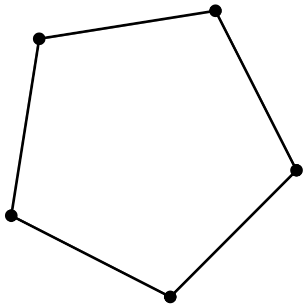
4.4.13 Dans le parallélogramme $ABCD$, on connaît $\overline{AB} = 30$, $\overline{BC} = 20$ et on sait que l'angle en B vaut 60°. Calculer la longueur des diagonales de ce parallélogramme ainsi que l'angle déterminé par celles-ci. Trouver enfin l'aire du quadrilatère $ABCD$.

4.4.14 Calculer les trois côtés d'un triangle, sachant qu'ils sont exprimés par trois nombres entiers consécutifs et que le plus grand angle est le double du plus petit.

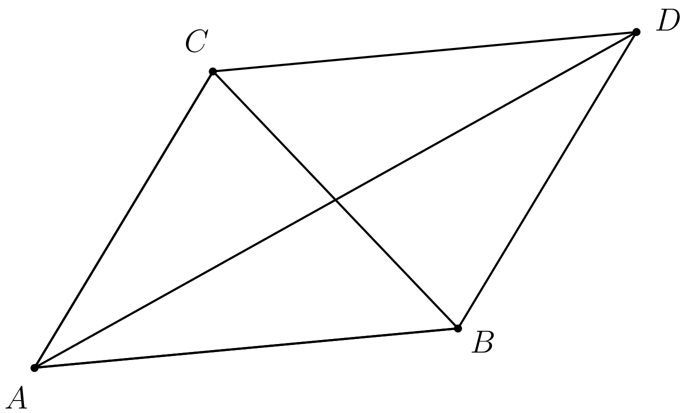
4.4.15 Dans le trapèze $ABCD$, les bases sont $\overline{AD} = 15$ m, $\overline{BC} = 10$ m et les côtés non parallèles sont $\overline{AB} = 8$ m, $\overline{CD} = 7$ m. Calculer les angles et l'aire du trapèze.

4.4.16 Le Pentagone est le plus grand bâtiment administratif au monde, si l'on considère la surface occupée. La base du bâtiment a la forme d'un pentagone régulier, dont chaque côté mesure 276 m.

Déterminer l'aire de la base du bâtiment.



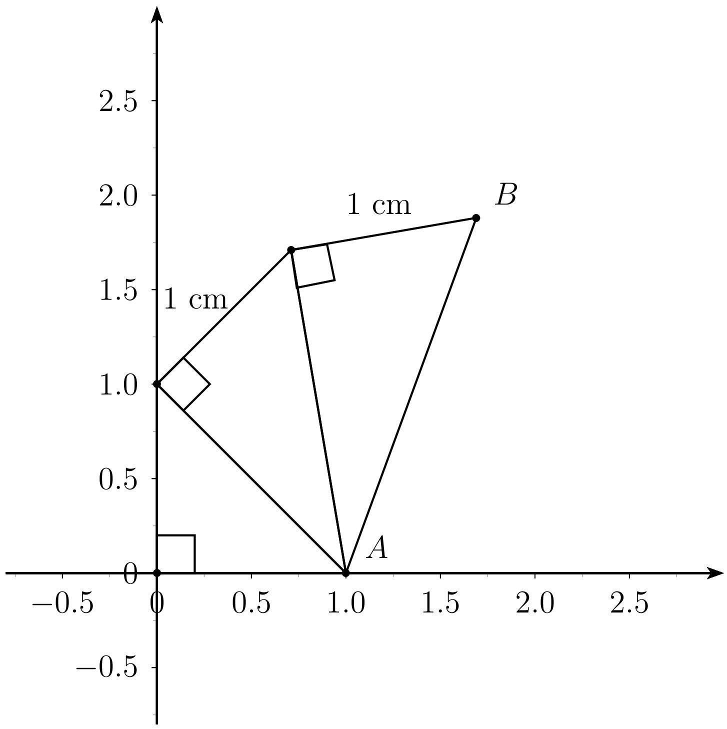
4.4.17 Comment partager un parallélogramme en quatre parties de même aire ?
Facile, il suffit de tracer les diagonales de ce parallélogramme, et on a ainsi quatre parties de même aire...



Est-ce vrai ?

4.4.18 Calculer les longueurs des bissectrices d'un triangle ABC si $a = 62.5$, $b = 48.2$ et $c = 37.8$.
On considère la bissectrice issue du sommet A comme étant le segment défini par le sommet A et l'intersection de cette bissectrice avec le côté a.

4.4.19 En utilisant les informations données sur le dessin, calculer la longueur $\overline{AB}$.



4.4.20 Calculer le côté et les angles inconnus d'un triangle ABC, connaissant $a = 5$, $c = 7$ et sachant que la longueur de la bissectrice issue de B est égale 4.5.

4.4.21 Pour calculer la distance séparant deux points A et B situés sur les rives opposées d'un fleuve, un géomètre choisit un point C situé sur la même rive à 240 m du point A. Il détermine alors que les angles $\angle BAC$ et $\angle ACB$ mesurent respectivement $63°24'$ et $54°6'$. Calculer la distance entre les points A et B (au cm près).

4.4.22 Pour un observateur, la direction de visée du sommet d'un pylône fait un angle de $53.6°$ avec l'horizontale ; en reculant de 7 m sur le sol horizontal dans le plan de visée, l'angle d'élévation n'est plus que $32°$.
Quelle est la hauteur du pylône sachant que l'œil de l'observateur est à 1,7 m du sol ?

4.4.23 Une tour de 50 m de haut est située sur le flanc d'une colline. Depuis le pied de la tour, on descend de 220 m le long du flanc de la colline et on mesure l'angle vertical θ sous lequel on voit la tour, soit $\theta = 12.5°$.
Calculer l'angle d'inclinaison du flanc de la colline relativement à l'horizontale.

4.4.24 Un hélicoptère est en vol stationnaire 600 m au-dessus du sommet C d'une montagne qui culmine à 1'560 m d'altitude. Du sommet C et de l'hélicoptère, on peut voir le sommet S d'un deuxième pic plus élevé. Depuis l'hélicoptère, le sommet S est vu sous

un angle de dépression (angle vertical entre le rayon visuel descendant et l'horizontale) de 43° ; depuis le petit sommet C, on voit le sommet S sous un angle d'élévation (angle vertical entre le rayon visuel montant et l'horizontale) de 18°.
Calculer la distance entre les deux sommets, ainsi que l'altitude du sommet S.

4.4.25 A l'origine la Tour de Pise était perpendiculaire à la surface du sol et mesurait 54 m de hauteur. Comme elle s'enfonce dans le sol (en pivotant relativement au centre de sa base que l'on suppose fixe), elle penche maintenant d'un angle θ relativement à la verticale. Lorsque le centre du haut de la tour est observé à partir d'un point du sol (plat) distant de 45 m du centre de sa base (dans le plan vertical contenant la tour penchée, du côté où penche celle-ci), l'angle d'élévation est de 53.3°.
Calculer l'angle θ, ainsi que la distance séparant la position actuelle du centre du haut de la tour à sa position lors de l'édification de la tour.

4.5 Solutions des exercices

La mesure des angles

4.1.1

a) $30°$
b) $120°$
c) $126°$
d) $720°$
e) $-150°$
f) $450°$
g) $57.3°$
h) $40.1°$
i) $-114.6°$
j) $171.9°$

4.1.2

a) $\frac{\pi}{4}$
b) $\frac{\pi}{3}$
c) $\frac{5\pi}{12}$
d) $-\frac{\pi}{6}$
e) $\frac{2\pi}{3}$
f) $\frac{7\pi}{4}$
g) 0.40
h) -1.88
i) 5.10
j) 2.66

4.1.3

a) 172 mm
b) 95 mm

4.1.4

a) 84 mm
b) 140 mm

4.1.5

a) 1853 m
b) Non

4.1.6

90 km

4.1.7

$47°20'$N

4.1.8

1056 km

4.1.9

Circonférence : 40000km ; rayon : 6366 km

4.1.10

$L \simeq 8.38$ cm et $A \simeq 100.53$ cm^2.

4.1.11
La distance entre les points A et B est d'environ 221.66 km.

4.1.12 En une seconde, la Terre tourne de 0.00417 degrés.

4.1.13
a) $\frac{4}{5}$ tours/minute ; b) 288°/seconde.

4.1.14 509.30 tours/minutes.

4.1.15

a) 97,7 cm
b) 1832,60 cm^2

Le triangle rectangle

4.2.1
a) $\beta = 58°$, $AC \simeq 8.48$, $AB \simeq 5.30$; b) $\gamma = 58°$, $AC \simeq 2.65$, $AB \simeq 4.24$; c) $\beta = 63°$, $BC \simeq 22.03$, $AC \simeq 19.63$; d) $\beta \simeq 30.96°$, $\gamma \simeq 59.04$, $BC \simeq 11.66$; e) $\beta = 26°$, $BC \simeq 27.37$, $AB \simeq 24.60$; f) $\gamma = 45°$, $AC \simeq 8.49$, $AB \simeq 8.49$.

4.2.2
$BC \simeq 78.50$ cm, $CH \simeq 69.95$ cm, $HA \simeq 18.16$ cm.

4.2.3
Le clocher mesure ~ 27.62 m.

4.2.4
Il faut parcourir $2'721.03$ m.

4.2.5
Le rayon mesure ~ 6.39 m et la hauteur de la voûte est de ~ 8.57 m.

4.2.6
Le périmètre mesure 35.27 cm et l'aire est de 85.6 cm^2.

4.2.7
Le rayon est de ~ 22.62 cm.

4.2.8
La hauteur du bâtiment est de ~ 13.36 m.

4.2.9
Elle le voit sous un angle de $\sim 20.27°$.

4.2.10
La hauteur du jet d'eau est ~ 221 m.

4.2.11
a) $\widehat{JAI} \simeq 41.81°$, $\widehat{JAB} \simeq 48.19°$, $\widehat{JAD} \simeq 70.53°$; b) ~ 10.39 cm.

4.2.12
Angle au sommet : 36.87°. Angle de développement : 113.84° .

4.2.13
$\overline{AD} = 4$, $\overline{EB} = 3$, $\overline{BC} = 6$, $\widehat{ACB} = \widehat{AED} \simeq 53.13°$, $\widehat{BED} \simeq 126.87°$, $\widehat{CAB} \simeq 36.87°$.

4.2.14
La distance entre le pied de l'échelle et le mur vaut environ 1.5 m. Le point d'appui s'abaisse d'environ 58 cm.

4.2.15
$\overline{AC} = 9.7$

4.2.16
Les trois angles mesurent 90°, 22.5° et 67.5°. Les deux autres côtés mesurent environ 26.13 unités et 24.14 unités.

4.2.17 La hauteur de la tour est d'environ 68.24 m.

4.2.18
La hauteur de la tour est d'environ 31.9 m.

4.2.19
La distance de A à B vaut environ 89 m.

4.2.20
La hauteur du nuage est d'environ 4069.54 m.

4.2.21
L'arbre mesure environ 18.4 m de haut et la rivière 10.6 m de large.

4.2.22
a) 6.50 m ($<$ 40 m) ; b) 3.84 m

4.2.23
a) base : 230.47 m ; arêtes latérales : 219.28 m ; b) 51.85° .

4.2.24
a) $Q(54.4\,;\,-25.4)$; b) diminution de 2 cm ; variation d'un angle de $-149.5°$ ou $210.5°$

Le cercle trigonométrique

4.3.1
cf formulaire.

4.3.2
a) $\cos(270° + t) = \sin(t)$

b) $\sin(-t - 270°) = \cos(t)$

c) $\sin(t - 270°) = \cos(t)$

d) $\cos(t - 270°) = -\sin(t)$

e) $\cos(-\dfrac{19\,\pi}{2} - t) = \sin(t)$

f) $\sin(t + \frac{\pi}{2})\,\cos(\pi - t) - \cos(\frac{\pi}{2} - t)\,\sin(t) = -1$

4.3.3
a) $t_1 = 120° + k \cdot 360°, k \in \mathbb{Z} \quad t_2 = -120° + k \cdot 360°, k \in \mathbb{Z}$

b) $t_1 \cong 56° + k \cdot 360°, k \in \mathbb{Z} \quad t_2 \cong 124° + k \cdot 360°, k \in \mathbb{Z}$

c) $t \cong -37° + k \cdot 180°, k \in \mathbb{Z}$

d) Pas de solution

e) $t \cong 79.4° + k \cdot 180°, k \in \mathbb{Z}$

f) $t_1 = -20° + k \cdot 120°, k \in \mathbb{Z} \quad t_2 = 80° + k \cdot 120°, k \in \mathbb{Z}$

g) $t \cong 14.6° + k \cdot 36°, k \in \mathbb{Z}$

h) $t_1 = 240° + k \cdot 720°, k \in \mathbb{Z} \quad t_2 = -240° + k \cdot 720°, k \in \mathbb{Z}$

4.3.4
a) $t_1 = k \cdot 3\,\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \quad t_2 = \frac{3\,\pi}{4} + k \cdot 3\,\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

b) $t_1 = \pi + k \cdot 4\,\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \quad t_2 = -\frac{\pi}{3} + k \cdot 4\,\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

c) $t_1 = k \cdot 2\,\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \quad t_2 = \frac{\pi}{5} + k \cdot \frac{2\,\pi}{5}, \quad k \in \mathbb{Z}$

d) $t_1 = k \cdot \pi, \quad k \in \mathbb{Z} \quad t_2 = k \cdot \frac{\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}$

e) $t_1 = \frac{\pi}{20} + k \cdot \frac{2\,\pi}{5}, \quad k \in \mathbb{Z} \quad t_2 = -\frac{3\,\pi}{4} + k \cdot 2\,\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

f) $t_1 = -\frac{3\,\pi}{5} + k \cdot \frac{12\,\pi}{5}, \quad k \in \mathbb{Z} \quad t_2 = -\frac{3\,\pi}{11} + k \cdot \frac{12\,\pi}{11}, \quad k \in \mathbb{Z}$

g) $t = \frac{\pi}{8} + k \cdot \frac{\pi}{4}, \qquad k \in \mathbb{Z}$

h) $t_1 = k \cdot \pi, \quad k \in \mathbb{Z} \quad t_2 = k \cdot \frac{\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}$

4.3.5

a) $t_1 = 120° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z} \quad t_2 = 240° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z}$

b) $x_1 = 90° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z} \quad x_2 = 30° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z} \quad x_3 = 150° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z}$

c) $z = \pm 115.5° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z}$

d) $t_1 = 45° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z} \quad t_2 = 135° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z} \quad t_3 = 225° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z}$
$t_4 = 315° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z}$

e) $x_1 = 41.8° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z} \quad x_2 = 138.2° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z}$

f) $x_1 = 38.2° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z} \quad x_2 = 141.8° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z}$

g) $t_1 = -42.4° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z} \quad t_2 = 222.4° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z}$

h) $t_1 = 45° + k \cdot 180°,\ k \in \mathbb{Z} \quad t_2 = -45° + k \cdot 180°,\ k \in \mathbb{Z} \quad t_3 = 60° + k \cdot 180°,\ k \in \mathbb{Z}$
$t_4 = -60° + k \cdot 180°,\ k \in \mathbb{Z}$

4.3.6

a) $x_1 = 180° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z} \quad x_2 = 247.4° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z}$

b) $t_1 = k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z} \quad t_2 = 36.87° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z}$

c) $x_1 = 135° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z}$

d) $t_1 = -90° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z} \quad t_2 = 30° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z}$

e) $t_1 = -39° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z} \quad t_2 = 100.9° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z}$

f) $x_1 = 34.6° + k \cdot 180°,\ k \in \mathbb{Z} \quad x_2 = -16.17° + k \cdot 180°,\ k \in \mathbb{Z}$

4.3.7

a) $t = 71.57° + k \cdot 180°,\ k \in \mathbb{Z}$

b) $\alpha_1 = k \cdot 180°,\ k \in \mathbb{Z} \quad \alpha_2 = 26.57° + k \cdot 180°,\ k \in \mathbb{Z}$

c) $t_1 = 45° + k \cdot 180°,\ k \in \mathbb{Z} \quad t_2 = 71.57° + k \cdot 180°,\ k \in \mathbb{Z}$

d) $x_1 = 67.5° + k \cdot 180°,\ k \in \mathbb{Z} \quad x_2 = -22.5° + k \cdot 180°,\ k \in \mathbb{Z}$

e) $\varphi_1 = 45° + k \cdot 180°,\ k \in \mathbb{Z} \quad \varphi_2 = -11.31° + k \cdot 180°,\ k \in \mathbb{Z}$

f) $t_1 = 24.6° + k \cdot 180°,\ k \in \mathbb{Z} \quad t_2 = 65.4° + k \cdot 180°,\ k \in \mathbb{Z}$

4.3.8

a) $t_1 = k \cdot 180°,\ k \in \mathbb{Z} \quad t_2 = 45° + k \cdot 90°,\ k \in \mathbb{Z}$

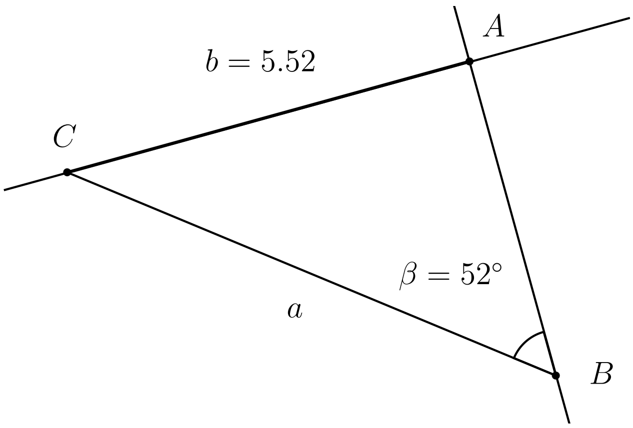
b) $x = 67.5° + k \cdot 90°,\ k \in \mathbb{Z}$

c) $x_1 = k\,\pi,\ k \in \mathbb{Z} \quad x_2 = \pi/18 + k \cdot 2\,\pi/3,\ k \in \mathbb{Z} \quad x_3 = 7\,\pi/6 + k \cdot 2\,\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

d) $x_1 = k\,\pi,\ k \in \mathbb{Z} \quad x_2 = 7\,\pi/6 + k \cdot 2\,\pi,\ k \in \mathbb{Z} \quad x_3 = 11\,\pi/6 + k \cdot 2\,\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Le triangle quelconque

4.4.1



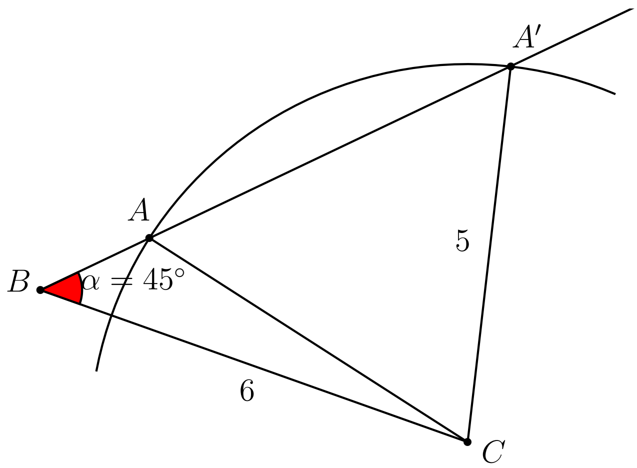
Pour qu'il n'y ait qu'un triangle possible, il faut que $b \simeq 5.52$ cm. Si $b < 5.52$ cm, la construction n'est pas possible. Si $5.52 < b < 7$ cm, il y a deux triangles possibles.
Si $b \geqslant 7$, 1 triangle.

4.4.2

C'est possible.

4.4.3

a) Deux triangles sont possibles:



b) On obtient ici un seul triangle.

4.4.4

	a	b	c	α	β	γ	$\mathcal{A}$
a)	5	6	7	44.4°	57.1°	78.5°	14.7
b)	5	7	8.7 / 2.8	35°	53.4°/ 126.6°	91.6°/ 18.4°	17.49 / 5.53
c)	4	9	7.4	26.0°	100.0°	54°	14.56
d)	5.9	9.1	8	40°	80°	60°	23.39
e)	6	5	5.0 / 9.8	73.7°/ 29.2°	53.1°/ 24.0°	53.1°/ 126.9°	12
f)	5.5	4	5.3	70°	43.6°	66.4°	10

4.4.5

a) $c = 18.6$, $\alpha = 10.1°$, $\gamma = 155.9°$; b) $a = 18.2/2.2$, $\alpha = 130.8°/5.3°$, $\beta = 27.3°/152.8°$; c) impossible.

4.4.6

$BC \simeq 63.8$ cm ; $BD \simeq 25.4$ cm ; $AD \simeq 56.5$ cm ; $AB \simeq 42.51$ cm.

4.4.7

Le rayon mesure 13.2.

4.4.8

Aire= 23.7 ; $\beta = 101.3°$; $\gamma = 67.3°$; $\delta = 81.4°$.

4.4.9

$BC = 15,3$

4.4.10

L'altitude du sommet C est 1224.13 m.

4.4.12

L'angle α mesure 72° et l'angle β mesure 36°. Le côté AB mesure environ 3.4 cm et le côté DE mesure environ 6.5 cm.

4.4.13

Les diagonales mesurent environ 26.46 et 43.59 unités. L'aire du parallélogramme vaut environ 519.6 unités carrées. Les angles mesurent 64.29° et 115.71°.

4.4.14

Les longueurs des côtés du triangles sont 4, 5 et 6.

4.4.15

L'aire du trapèze vaut 86.6 m.

4.4.16

La surface du pentagone vaut environ 131 059 m^2.

4.4.18

$b_A = 29.32$, $b_B = 42.63$ et $b_C = 51.59$

4.4.19
Le segment AB mesure 2 cm.

4.4.20
$\alpha = 39.1°$, $\beta = 79°$, $\gamma = 61.9°$, $b = 7.8$

4.4.21
Distance AB : 219.17 m

4.4.22
Hauteur du pylône : 9.81 m

4.4.23
5.3 °

4.4.24
Distance de C à S : 502 m ; altitude : 1715 m.

4.4.25
$\theta = 5.2°$; 4.92 m

Chapitre 5

Statistiques

5.1 Statistiques descriptives

5.1.1 Dans chaque situation exposée ci-dessous,

a) décrire la population étudiée ;
b) décrire l'échantillon ;
c) nommer la variable étudiée ;
d) décrire l'ensemble des catégories ou des valeurs de la variable ;
e) donner le type de variable étudiée.

Situation 1
On effectue un sondage auprès de 500 habitants de la ville de Lausanne pour connaître leur chaîne de télévision favorite.

Situation 2
Dans une étude portant sur l'évolution de la situation économique en Suisse de 2000 à 2010, on s'intéresse au taux de chômage annuel de cette décennie.

Situation 3
Afin de déterminer le profil socioéconomique des ménages de la ville de Genève, on a noté le nombre d'enfants par ménage pour un échantillon de 380 ménages.

Situation 4
Selon les données du recensement helvétique de l'an 2000, à la question « Quelle est la langue dans laquelle vous pensez et que vous savez le mieux ? »,

– 63.7% de la population a répondu « l'allemand » ;
– 20.4% de la population a répondu « le français » ;
– 6.5% de la population a répondu « l'italien » ;
– 0.5% de la population a répondu « le romanche » ;
– et 9.0% de la population a cité une langue non nationale ;

5.1.2 Donner le type de chacune des variables suivantes :

a) La superficie des lacs de Suisse.
b) Le pays d'origine des touristes qui visitent la Suisse.
c) Le nombre d'étudiants dans les gymnases vaudois.
d) La longueur d'un crayon
e) Prenez-vous le train chaque semaine ?
   a) Oui
   b) Non
f) Ressentez-vous du stress avant de prendre l'avion ?
   a) Toujours
   b) Souvent
   c) Parfois
   d) Rarement
   e) Jamais

5.1.3 Pour chaque question, indiquer le type de variable et l'échelle de mesure.

a) Avez-vous au moins une note insuffisante dans votre bulletin semestriel ?
   1. Non   2. Oui
b) Combien de notes insuffisantes avez-vous dans votre bulletin semestriel ?
   1. 0   2. 1   3. 2 ou 3   4. 4 et plus
c) Combien de note insuffisante avez-vous dans votre bulletin semestriel ?
d) Quel est votre taux d'échec au semestre ?

$$\left(\text{taux d'échec} = \frac{\text{Nombre de notes insuffisantes}}{\text{Nombre total de notes}}\right)$$

   1. 0%   2. De 1% à 15.9%   3. De 16% à 49.9%   4. 50% et plus
e) Quel est votre taux d'échec au semestre ?
f) Dans quelle mesure êtes-vous d'accord avec l'affirmation « Les élèves ayant plus de quatre notes insuffisantes en fin de première année devraient arrêter leurs études gymnasiales ».
   1. Fortement en désaccord   2. En désaccord   3. Plutôt d'accord   4. Totalement d'accord
g) Quelle est votre année de naissance ?

5.1.4 Dans le bulletin météo du journal local, on trouve notamment pour chaque jour de la semaine l'heure du lever du soleil et la vitesse des vents. Indiquer le type de chacune des deux variables et l'échelle de mesure qui lui est associée.

5.1.5 D'après l'office fédéral de la statistique, les blessés légers victimes d'accidents de la route en 2013 se répartissent par moyen de locomotion de la façon suivante :

Moyen de locomotion	**Blessés légers**
Voiture de tourisme	9570
Motocycle	2479
Bicyclette	2435
Piétons	1570
Autres	1196

a) Représenter cette situation à l'aide d'un diagramme circulaire.
b) Faire de même à l'aide d'un diagramme en barres.
c) Peut-on déduire de ces chiffres qu'il est moins dangereux de se déplacer en moto plutôt qu'en voiture ?

5.1.6 Le nombre de véhicules à moteur mis en circulation en Suisse en 2011 est donné par catégorie dans le tableau suivant :

Catégorie	Nombre
Voitures de tourisme	327'955
Véhicules de transport de personnes	3'950
Véhicules de transport de choses	33'119
Véhicules agricoles	3'714
Véhicules industriels	4'006
Motocycles	48'133
Total des véhicules	420'875

Source : Office fédéral de la statistique, site web Statistique suisse 2012

Représenter ces données graphiquement par un diagramme à rectangles horizontaux et par un diagramme circulaire. Laquelle de ces deux représentations est-elle la plus appropriée ?

5.1.7 Lors d'un sondage, on a demandé à 820 citoyens suisses leur opinion sur les accords bilatéraux Suisse-UE. Les réponses se répartissent comme suit.

Répartition de .... **selon** ....

Utilité	**Effectifs**	**Pourcentage**
Très utiles	95	
Utiles	342	
Nuisibles	210	
Très nuisibles	46	
Sans opinion	127	
Total		

a) Décrire la population étudiée, nommer la variable considérée et le type d'échelle de mesure.

b) Compléter le tableau de distribution ci-dessus ainsi que son titre.

c) Représenter graphiquement la distribution par un diagramme approprié au type de variable.

d) Calculer le taux de confiance en ces accords, soit le pourcentage de personnes qui estiment les accords bilatéraux utiles ou très utiles.

5.1.8 Donner la première des classes qui permettraient de grouper une série de 36 données, précises au centième, sachant que la plus petite valeur est 2,65 et la plus grande 18,45.

5.1.9 On désire grouper en classes les revenus de 80 stagiaires. Le plus petit revenu est de 252 francs et le plus grand de 937 francs. Donner la première classe de la distribution des revenus.

5.1.10 On a récolté les données suivantes :

314	473	500	812	566	212	606	935	247	474	993	432
262	1080	972	383	975	978	366	322	638	570	1094	270
813	227	950	1030	776	503	398	398	755	650	1008	711
563	930	1054	836	631	519	1019	299	1032	500	918	979
570	592	1023	859	759	990	964	598	1097	803	998	337

a) Grouper les données en 6 classes de largeur 150 ([200 ;350[, [350 ;500[, etc.) et dresser un tableau de distribution.

b) Construire l'histogramme et le polygone des fréquences.

5.1.11 Sur une route où la vitesse est limitée à 80 km/h, on a mesuré la vitesse de 50 véhicules.

84	81	76	71	80	81	83	84	80	83
74	75	92	76	80	82	94	73	83	83
75	81	79	97	78	82	76	78	82	82
78	81	91	68	82	73	82	79	75	77
83	80	77	81	69	78	81	83	87	87

a) Grouper les données en classes **fermées à droites** et dresser un tableau de distribution.

b) Construire l'histogramme et le polygone des fréquences.

c) Compléter l'analyse suivante : « Une .... des véhicules respectent la limitation de vitesse de 80 km/h et ..... % roulent entre 80 et 85 km/h. En tenant compte d'une marge de tolérance de 5 km/h, ... % des véhicules sont amendables. »

d) Pourquoi a-t-on fermé les classes à droite dans ce contexte ?

5.1.12 Le tableau ci-dessous met en parallèle la distribution de l'âge des Suisses en 1860, lors du premier recensement, et en 2009.

Répartition de la population suisse en 1860 et 2009 selon l'âge.

Âge	1860		2009	
	Effectif	**Pourcentage**	**Effectif**	**Pourcentage**
] 0 ; 10]	518'538	20.6%	763'546	9.8%
] 10 ; 20]	476'347	18.9%	872'579	11.2%
] 20 ; 30]	429'507	17.1%	978'050	12.6%
] 30 ; 40]	362'978	14.4%	1'096'126	14.1%
] 40 ; 50]	287'564	11.4%	1'277'392	16.4%
] 50 ; 60]	230'276	9.2%	1'031'892	13.3%
] 60 ; 70]	138'932	5.5%	840'583	10.8%
] 70 ; 80]	59'549	2.4%	554'034	7.1%
] 80 ; 90]	11'095	0.4%	311'195	4.0%
90 et plus	610	0.0%	60'409	0.8%
Total	2'515'396	99.9% *	7'785'806	100.1% *

Source : Office fédéral de la statistique, site web Statistique suisse 2012.

*Les pourcentage totaux ne sont pas exactement égaux à 100% à cause des arrondis.

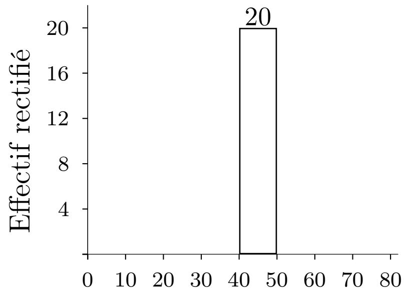
a) Quelle représentation graphique mettrait le mieux en évidence les différences de distribution des deux années étudiées ? Justifier la réponse.

b) Représenter sur un même graphique le polygone des fréquences relatives de ces deux années.

c) Compléter le texte suivant :
« La population suisse a plus que .... entre 1860 et 2009 en passant de .... à presque .... d'habitants. En 1860, la population était très jeune : l'aire sous le polygone est plus grande avant ..... ans qu'après. A cette époque, seulement ....% des habitants avaient plus de 70 ans, contre ....% actuellement, soit une proportion ...... fois plus élevée. En 1860, le groupe des moins de 20 ans représentait près de ....% de la population contre ....% aujourd'hui, soit une proportion réduite de .... En 1860, la classe la plus représentée est celle des .... , avec ....% des habitants, alors qu'en 2009, c'est la classe des .... avec ....% des habitants. »

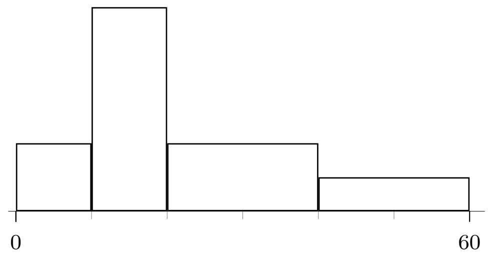
5.1.13 a) Compléter l'histogramme de la distribution suivante :

Amplitude	Classe	Effectif	Effectif rectifié
	[10 ; 40 [	12	
	[40 ; 50 [	20	
	[50 ; 60 [	18	
	[60 ; 80 [	10	
	Total	60	

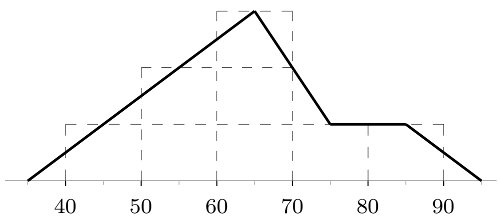


b) Compléter le tableau de distribution en utilisant l'information donnée par l'histogramme.

	Pourcentage
[0 ; [	
[; [	
[; [	
[; 60 [	
Total	100%



c) Le polygone de fréquences ci-contre représente une distribution. Quel est le pourcentage des données ayant une valeur comprise entre 50 et 60 ?



5.1.14 Dans une usine, lors d'un contrôle qualité, le diamètre, en mm, de 50 boulons tirés au hasard dans la production a été mesuré. Les résultats suivants ont été obtenus.

Répartition de .... **selon** ....

Diamètre [mm]	**Effectifs**
$[21.5; 21.8[$	4
$[21.8; 21.9[$	6
$[21.9; 22.0[$	6
$[22.0; 22.1[$	13
$[22.1; 22.2[$	8
$[22.2; 22.3[$	7
$[22.3; 22.5[$	6
Total	50

a) Décrire la population étudiée, nommer la variable considérée, le type de la variable et l'échelle de mesure. Compléter le titre du tableau de distribution.

b) Représenter l'histogramme de ces données.

c) Représenter le polygone des fréquences cumulées.

d) Si la valeur nominale du diamètre des boulons est de 22 mm, calculer le pourcentage de boulons qui s'en écartent de plus de 0.3 mm ? Vérifier la cohérence du résultat sur le polygone des fréquences cumulées.

5.1.15 Déterminer la moyenne, la médiane et le mode ou la classe modale de chaque jeu de données.

a)

valeur	1	2	3	4	5	6
effectif	1	3	5	5	7	4

b) -0.5 0.1 0.9 0.3 0.2 -0.6 0 -1.0 0.7 -0.1

c)

classe	$[100; 200[$	$[200; 300[$	$[300; 400[$	$[400; 500[$
fréquence	32%	20%	12%	36%

d)

classe	$[0; 2[$	$[2; 3[$	$[3; 4[$	$[4; 5[$	$[5; 10[$
effectif	12	48	94	42	4

5.1.16 Un professeur de mathématiques recueille toutes les notes qu'il a mises dans une classe donnée et obtient le tableau de distribution suivant :

Note	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	5.5	6
Effectif	0	1	4	9	9	21	28	33	34	30	21

a) Décrire la variable statistique étudiée et donner son type.

b) Tracer l'histogramme de cette distribution.

c) Calculer le pourcentage associé à chacune des valeurs de ce tableau de distribution.

d) Donner le mode, la médiane et la moyenne.

5.1.17 Lors d'une journée de recrutement de l'armée, on a mesuré la taille en centimètres de 50 hommes âgés de 20 ans et reporté les mesures ci-dessous :

```
171.5 171.5 172.0 177.0 171.0 169.5 176.0 174.5 170.5 175.0 173.5
172.5 172.0 173.0 175.5 176.5 173.0 173.5 171.0 169.5 173.5 171.0
174.0 166.0 173.5 168.0 177.0 170.0 175.0 167.5 176.5 172.5 177.0
172.5 179.5 168.0 175.0 174.0 178.5 167.0 170.5 176.0 172.0 177.0
174.0 171.0 179.0 176.0 170.0 170.0
```

a) Décrire la variable statistique étudiée et donner son type.

b) Grouper les données en 7 classes de deux centimètres de large, comprises entre 166 cm et 180 cm, calculer l'effectif, la fréquence et la fréquence cumulée pour chaque classe.

c) Tracer l'histogramme de cette distribution et tracer le polygone des fréquences cumulées croissantes.

d) Donner la classe modale, la médiane et la moyenne.

5.1.18 La taille moyenne de 41 250 000 adultes d'un pays est de 1,67 m. Si l'on sait de plus que, dans ce pays, la taille moyenne des femmes est de 1,61 m et celle des hommes de 1,74 m, de combien le nombre de femmes dépasse-t-il le nombre d'hommes ?

5.1.19 Le prof de maths m'a dit : « Finalement, vous avez 4.5 de moyenne sur les cinq notes de l'année ». Sachant que mes quatre premières notes étaient 5.2, 3.1, 4.4 et 4.2, calculer la cinquième note.

5.1.20 En utilisant le tableau de distribution de l'exercice 5.1.12, page 139,

a) Calculer l'âge moyen de la population suisse en 1860 et en 2009 et représenter chaque moyenne par un triangle sous l'axe des âges des polygones de fréquences construits au point b) de l'exercice 5.1.12.

b) Calculer l'âge médian de la population suisse en 1860 et en 2009 et marquer chaque médiane par une barre verticale sur le graphique précédent.

c) Déterminer la classe modale de l'âge de la population suisse en 1860 et en 2009. Cette notion est-elle représentative dans le cas étudié ? Justifier la réponse

d) Pourquoi l'âge moyen et l'âge médian de l'année 1860 sont-ils différents ? Pourquoi l'âge moyen et l'âge médian de l'année 2009 sont-ils presque égaux ?

e) Que peut-on conclure en comparant les âges moyens et médians des années 1860 et 2009 ?

5.1.21 En utilisant le tableau de distribution de l'exercice 5.1.14, page 141,

a) Calculer le diamètre moyen des boulons et représenter la moyenne par un triangle sous l'axe horizontal de l'histogramme construit au point b) de l'exercice 5.1.14.

b) Estimer la valeur de la médiane à l'aide du polygone des fréquences cumulées construit au point b) de l'exercice 5.1.14. Calculer de diamètre médian et vérifier sa proximité avec la valeur estimée. Marquer cette valeur par une barre verticale sur l'histogramme.

c) Déterminer la classe modale. Cette notion est-elle représentative ici ? Justifier la réponse.

d) Que peut-on conclure en comparant la moyenne, la médiane et la classe modale sur la forme de la distribution des diamètres des boulons ?

5.1.22 Déterminer la variance et l'écart-type de chaque jeu de données.

a)

valeur	1	2	3	4	5	6
effectif	1	3	5	5	7	4

b) -0.5 0.1 0.9 0.3 0.2 -0.6 0 -1.0 0.7 -0.1

c)

classe	[100; 200[	[200; 300[	[300; 400[	[400; 500[
fréquence	32%	20%	12%	36%

d)

classe	[0; 2[	[2; 3[	[3; 4[	[4; 5[	[5; 10[
effectif	12	48	94	42	4

5.1.23 On a mesuré la vitesse de 50 véhicules :

Vitesse	Effectif
$[65; 70[$	2
$[70; 75[$	7
$[75; 80[$	15
$[80; 85[$	20
$[85; 90[$	2
$[90; 95[$	3
$[95; 100[$	1

a) Décrire la variable statistique étudiée et donner son type.

b) Trouver la classe modale.

c) Calculer le pourcentage associé à chacune des valeurs de ce tableau de distribution.

d) Tracer l'histogramme de cette distribution.

e) Calculer les fréquences cumulées.

f) Tracer le polygone des fréquences cumulées.

g) Calculer la moyenne et l'écart-type de cette distribution.

5.1.24

a) Une série A représente l'âge des cinq membres d'une famille et une série B celui des élèves d'une classe de gymnase. Laquelle des deux séries aura le plus grand écart-type ?

b) Un professeur de mathématiques fait passer un travail dans deux classes. Les deux groupes obtiennent la même moyenne, mais l'écart-type de la première classe est plus grand que celui de la seconde. Dans quelle classe peut-on dire que les élèves ont à peu près tous le même niveau sur ce sujet ?

c) Dans une région aride du globe, on enregistre les précipitations quotidiennes, en mm, durant 60 jours consécutifs. La moyenne des 60 données est de 0. Quelle est la valeur de l'écart-type ?

d) Dans une classe de première année de gymnase, la moyenne d'âge est de 16,16 ans, avec un écart-type de 0,76 an. Si les élèves de cette classes restent les mêmes, que vaudront la moyenne $\overline{x}$ et l'écart-type s en troisième année ?

e) Vrai ou faux ? Toutes les données d'une distribution dont la moyenne est 70 et l'écart-type 10 sont comprises entre 60 et 80.

5.1.25 Un maître rend un test dans une classe de 22 élèves en disant : « La moyenne de la classe est de 4.20 avec un écart-type de 0.83 ». Donner une interprétation de ces informations.

5.1.26 Au laboratoire de physique, une série de mesures de l'accélération de la pesanteur terrestre a donné les résultats suivants : 9.95 9.85 10.13 9.69 9.47 9.98 9.87 9.46 10.00.
Calculer la moyenne et l'écart-type de ces résultats et interpréter.

5.1.27 En reprenant les données du tableau de distribution de l'exercice 5.1.23, page 144,

a) Calculer une approximation de la vitesse moyenne et de l'écart-type et interpréter.

b) Les données sont-elles homogènes ?

5.1.28 Deux enseignants, l'un travaillant en Suisse où les tests sont notés de 1 à 6 et l'autre travaillant en France où les tests sont notés de 0 à 20, discutent de leur classe.
L'enseignant suisse constate que sa classe a une moyenne de 4.1 avec un écart type de 1.2.
L'enseignant français constate que sa classe a une moyenne de 12.5 avec un écart type de 5.3.

a) Si x est une note attribuée dans le système français et y une note attribuée dans le système suisse, déterminer la relation entre x et y qui permet de transposer les notes d'un système à l'autre.

b) Si on compare les moyennes des ces deux classes, laquelle est la meilleure ?

c) Pourquoi le coefficient de variation $\dfrac{\sigma}{\bar{x}}$ ne permet-il pas de mesurer l'homogénéité des résultats de ces classes ?

d) Quelle est la classe la plus homogène ? Justifier la réponse par un calcul adéquat à définir.

5.1.29 Déterminer la médiane $\tilde{x}$ et les quartiles Q_1 et Q_3 de chaque jeu de données, puis représenter les données sous la forme d'un boxplot.

a)

1	3	6	6	3	4	1
2	1	2	5	2	10	0
6	3	2	3	7	4	2

b)

valeur	-2	-1	0	1	2
effectif	18	10	15	12	5

c)

classe	$[140; 150[$	$[150; 160[$	$[160; 165[$	$[165; 170[$	$[170; 180[$
fréquence	10%	15%	40%	20%	15%

5.1.30 On reprend le tableau de distribution de l'exercice 5.1.16, page 142,

a) Calculer la variance et l'écart-type.

b) Calculer le premier quartile, la médiane et le troisième quartile.

c) Tracer la boîte à moustaches correspondante.

5.1.31 On reprend le tableau de distribution de l'exercice 5.1.17, page 142,

a) Calculer la variance et l'écart-type.

b) Calculer le premier quartile, la médiane et le troisième quartile.

c) Tracer la boîte à moustaches correspondante.

5.1.32 On reprend le tableau de distribution de l'exercice 5.1.23, page 144,

a) Calculer le premier quartile, la médiane et le troisième quartile.

b) Tracer la boîte à moustaches correspondante.

5.1.33 Voici les âges de 20 personnes qui se présentent au permis de conduire :

18	19	19	23	36	21	57	23	22	19
18	18	20	21	19	26	32	19	21	20

a) Donner le type de la variable étudiée.

b) Calculer la moyenne, la médiane et le mode de cette série statistique. Quelle est le paramètre de position le plus approprié ?

c) Quel est le pourcentage de personnes de 25 ans au plus qui se présentent à l'examen ?

d) Quel est la cote z du candidat le plus âgé ? Interpréter le résultat.

e) Quel âge aurait un candidat avec un score $z = -1$? Est-ce possible ?

5.1.34 Trois élèves se disputent le prix du meilleur financement de la semaine spéciale dans une école :

— Edgar a vendu 85 tablettes de chocolat, alors que la moyenne de vente est de 52 tablettes par élève avec un écart-type de 13 tablettes.

— Faustine a vendu 25 arrangements de fleurs, avec une moyenne de 12 arrangements et un écart-type de 6.

— Georges a vendu 75 abonnements au journal de l'école, avec une moyenne de 47 abonnements et un écart-type de 10.

Qui mérite le prix ?

5.1.35 Voici la durée d'hospitalisation en jours de 40 bébés nés à terme :

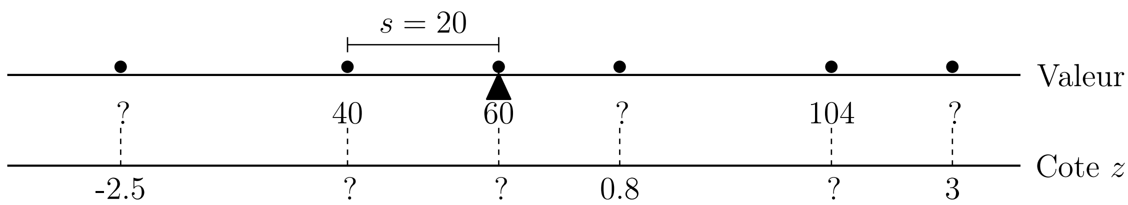
2	1	7	1	33	2	2	3	4	3
4	3	3	10	9	2	5	4	3	3
20	6	2	4	5	2	1	3	3	4
4	2	3	4	3	2	3	4	2	3

a) Représenter cette distribution sous la forme d'une boîte à moustaches.

b) Quel est la cote z du bébé qui est resté 20 jours à l'hôpital ?

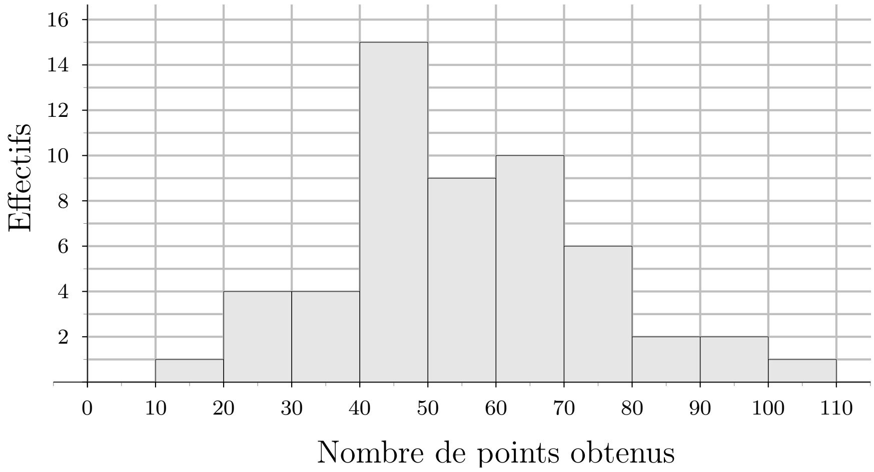
c) Calculer le pourcentage des bébés dont l'écart à la moyenne n'excède pas un écart-type. Quelle a été la durée de leur hospitalisation ?

5.1.36 À l'aide de l'information donnée pour chacun des points du pictogramme ci-dessous, déterminer, selon les cas, la valeur ou la cote z de chaque point du graphique.



5.1.37 Le nombre de points obtenus par les écoles de Suisse au concours de *Mathématiques sans Frontières* est représenté dans l'histogramme suivant :

Répartition de .... selon ....



a) Nommer précisément la variable étudiée, donner son type et le type d'échelle de mesure. Compléter le titre du graphique.

b) Calculer la moyenne $\bar{x}$ et l'écart-type σ de ces résultats et interpréter ces mesures. Marquer ces résultats sur le graphique de façon appropriée.

c) Quelle est la cote z d'une école ayant obtenu 110 points ?
Quelle est le nombre de points obtenus par une école qui présente une cote z égale à -2 ?

d) Les données sont-elles homogènes ? Justifier la réponse.

5.1.38 Le nombre d'heures de fonctionnement de 50 piles à combustible a été mesuré.

15	238	164	222	764	501	2	43	140	104
492	158	85	311	432	130	308	954	489	491
335	60	209	104	286	229	22	347	326	332
20	225	89	125	61	34	3	287	125	318
91	305	192	491	209	168	869	183	541	552

a) Regrouper ces données dans un tableau de distribution en formant des classes d'amplitude égale à 100 heures, avec une dernière classe ouverte « ≥ 600 » et représenter le polygone des fréquences correspondant.

b) A l'aide du tableau, estimer par calculs la moyenne et l'écart-type. Représenter sur le graphique la moyenne par un triangle et l'écart-type par un intervalle et interpréter.

c) En utilisant la moyenne et l'écart-type obtenus sous b), calculer la cote z des deux valeurs extrêmes. Interpréter et critiquer l'interprétation.

d) Représenter le polygone des fréquences cumulées.

e) Déterminer graphiquement les quartiles et interpréter.

f) La compagnie qui fabrique ces piles garantit leur durée de vie. Ainsi, si une pile achetée dure moins de a heures, la compagnie s'engage à la remplacer gratuitement. D'après cet échantillon, quelle doit être la valeur de a si le fabricant ne veut pas remplacer plus de 3% des piles vendues ?

5.2 Solutions des exercices

5.1.1

Situation 1

a) *Population :* tous les habitants de la ville de Lausanne.
b) *Echantillon :* les 500 habitants choisis parmi la population totale.
c) *Variable étudiée :* la chaîne de télévision préférée d'une personne.
d) *Ensemble des catégories :* les noms des chaînes que peuvent recevoir les habitants de la ville de Lausanne, pour autant qu'on les retiennent pour le sondage.
e) *Type de variable :* qualitative nominale.

Situation 2

a) *Population :* la situation économique de la Suisse durant les années comprises entre 2000 et 2010.
b) *Echantillon :* toute la population est étudiée ici, il n'y a pas d'échantillon.
c) *Variable étudiée :* le taux de chômage.
d) *Ensemble des catégories :* tous les pourcentages compris entre 0% et 100%.
e) *Type de variable :* quantitative continue.

Situation 3

a) *Population :* les ménages de la ville de Genève.
b) *Echantillon :* les 380 ménages sélectionnés.
c) *Variable étudiée :* le nombre d'enfants par ménage.
d) *Ensemble des catégories :* l'ensemble des nombres entiers inférieurs à 20, en tous cas !
e) *Type de variable :* quantitative discrète.

Situation 4

a) *Population :* la population suisse.
b) *Echantillon :* la quasi-totalité de la population suisse.
c) *Variable étudiée :* la première langue d'une personne.
d) *Liste des catégories :* « l'allemand », « le français », « l'italien », « le romanche », « autre langue ».
e) *Type de variable :* qualitative nominale.

5.1.2

a) C'est une variable quantitative continue.
b) C'est une variable qualitative nominale.

c) C'est une variable quantitative discrète.

d) C'est une variable quantitative continue.

e) C'est une variable qualitative nominale.

f) C'est une variable qualitative ordinale (les valeurs peuvent être classées).

5.1.3

a) Variable qualitative nominale ; échelle nominale.

b) Variable quantitative discrète ; échelle ordinale.

c) Variable quantitative discrète ; échelle de rapports.

d) Variable quantitative continue ; échelle ordinale.

e) Variable quantitative continue ; échelle de rapports.

f) Variable qualitative ordinale ; échelle ordinale.

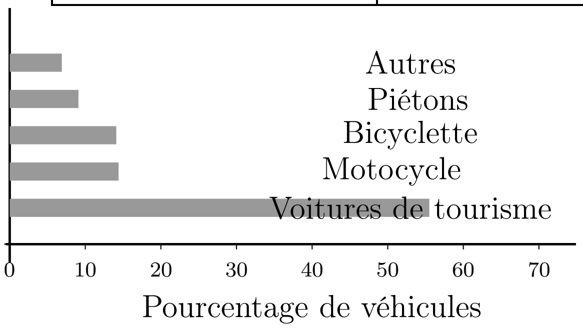
g) Variable quantitative discrète ; échelle d'intervalle.

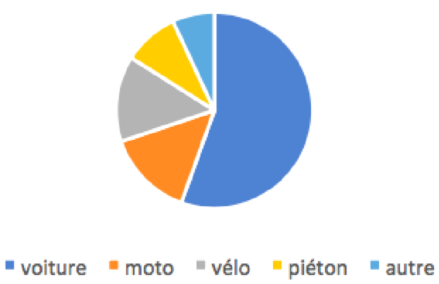
5.1.4

Heure du lever du soleil : variable quantitative continue ; échelle d'intervalle. La valeur 0h n'indique pas une absence de temps et diviser une heure par une autre n'a pas de sens. Vitesse des vents : variable quantitative continue ; échelle de rapports. Toutes les opérations mathématiques peuvent être effectuées sur les données.

5.1.5

Moyen de locomotion	Blessés légers	Pourcentage	Angle
Voitures de tourisme	9570	55,5%	199,7°
Motocycle	2479	14,4%	51,7°
Bicyclette	2435	14,1%	50,8°
Piétons	1570	9,1%	32,8°
Autres	1196	6,9%	25 °
Total	17250	100%	360°



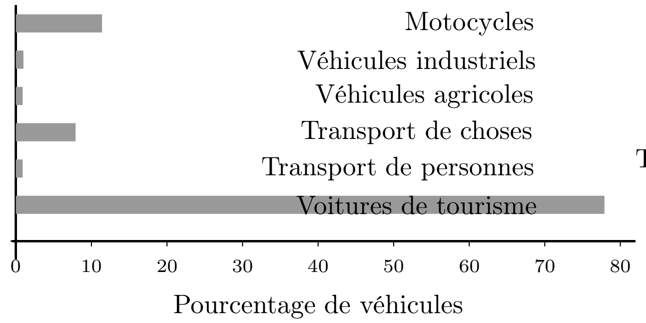


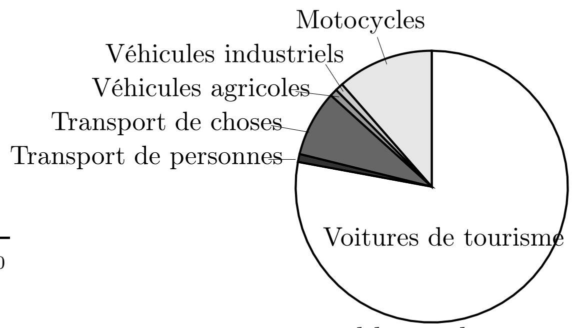
Non, on ne peut pas en déduire qu'il est moins dangereux de se déplacer en moto qu'en voiture car on ne sait pas le nombre total d'utilisateurs d'une voiture ou d'une moto. Il faudrait comparer les pourcentages relatifs et non absolus.

5.1.6

Répartition par catégorie des véhicules à moteur mis en circulation en CH en 2011.

Catégorie	Nombre	Pourcentage	Angle
Voitures de tourisme	327'955	77.9%	280.5°
Transport de personnes	3'950	0.9%	3.4°
Transport de choses	33'119	7.9%	28.3°
Véhicules agricoles	3'714	0.9%	3.2°
Véhicules industriels	4'006	1.0%	3.4°
Motocycles	48'133	11.4%	41.2°
Total des véhicules	420'875	100%	360°





Les deux représentations graphiques conviennent car on traite une variable qualitative relevée sur une échelle nominale. On atteint toutefois la limite de visibilité des petites parts sur le diagramme circulaire.

5.1.7

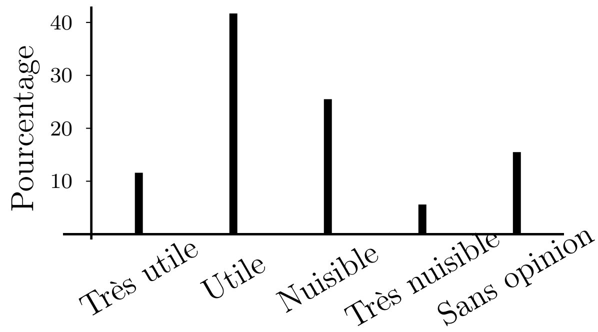
a) Population étudiée : les citoyens suisses, variable : opinion sur les accords bilatéraux, Si on excepte la catégorie "sans opinion", échelle ordinale ; sinon échelle nominale.

Répartition de 820 répondants selon leur opinion sur les accords bilatéraux.

b)

Utilité	**Effectifs**	**Frq**
Très utiles	95	11.6%
Utiles	342	41.7%
Nuisibles	210	25.6%
Très nuisibles	46	5.6%
Sans opinion	127	15.5%
Total	820	100%

c)



d) $11.6\% + 41.7\% = 53.3\%$ des sondés sont favorables aux accords bilatéraux.

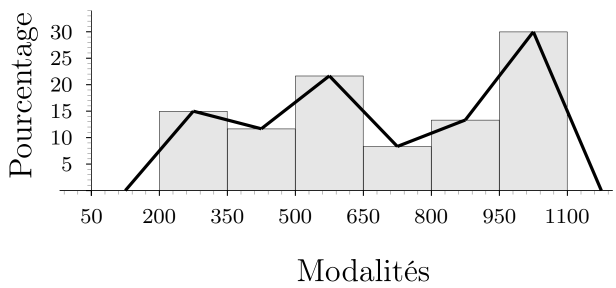
5.1.8 $k \approx 6$, $E = 18.45 - 2.65 = 15.8$, amplitude théorique : $\dfrac{15.8}{6} \approx 2.63$.
Amplitude choisie : 2.5, première classe $[\ 2.5\,;\ 5.0\ [$ et on formera finalement 7 classes.

5.1.9 $k \approx 7$, $E = 937 - 252 = 685$, amplitude théorique : $\dfrac{685}{7} \approx 98$.
Amplitude choisie : 100, première classe $[\ 250\,;\ 350\ [$ et on formera finalement 7 classes.

5.1.10

Répartition des données.

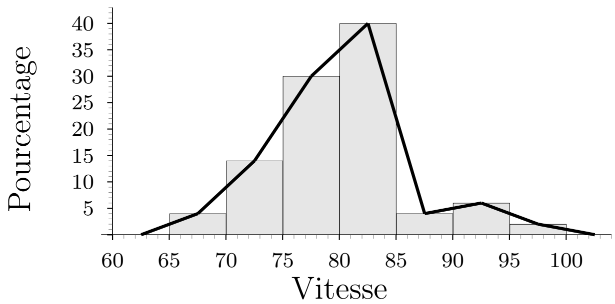
Classes	Effectif	Pourcentage
$[200; 350[$	9	15%
$[350; 500[$	7	11.67%
$[500; 650[$	13	21.67%
$[650; 800[$	5	8.33%
$[800; 950[$	8	13.33%
$[950; 1100[$	18	30%
Total	60	100%



5.1.11

Répartition de 50 véhicules selon leur vitesse.

Vitesse [km/h]	Effectif	Pourcentage
$]65; 70]$	2	4%
$]70; 75]$	7	14 %
$]75; 80]$	15	30%
$]80; 85]$	20	40%
$]85; 90]$	2	4%
$]90; 95]$	3	6%
$]95; 100]$	1	2%
Total	50	100%

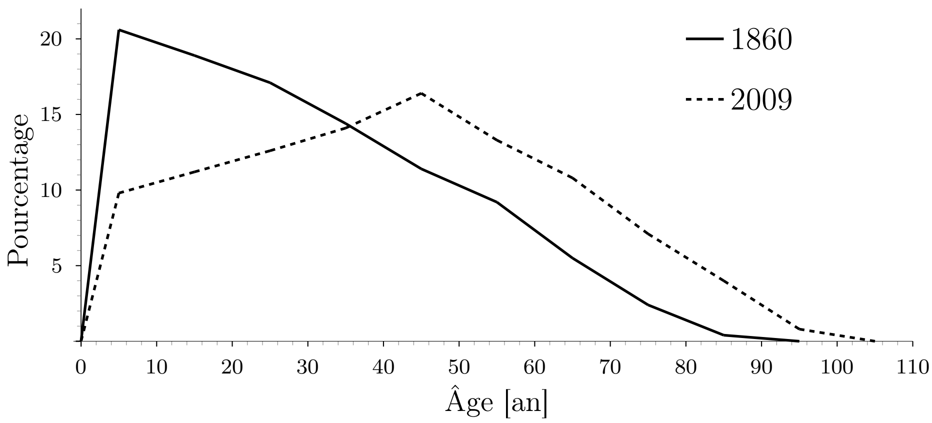


c) Une petite moitié des véhicules respectent la limitation de vitesse de 80 km/h et 40% roulent entre 80 et 85 km/h. En tenant compte d'une marge de tolérance de 5 km/h, 12% des véhicules sont amendables.
d) Parce que les véhicules roulant exactement à 80 km/h respectent la limitation et doivent être groupées avec ceux roulant plus lentement.

5.1.12

a) Le plus approprié est de représenter sur un même graphique le polygone des fréquences de chacune des deux années. Deux histogrammes superposés produiraient un graphique illisible. On utilise les fréquences relatives car les deux distributions n'ont pas le même effectif total.

b) **Répartition de la population suisse en 1860 et 2009 selon l'âge.**

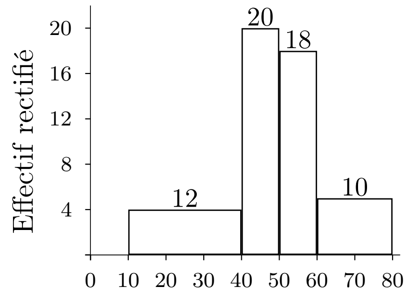


c) « La population suisse a plus que triplé entre 1860 et 2009 en passant de 2,5 millions à presque 7,8 millions d'habitants. En 1860, la population était très jeune : l'aire sous le polygone est plus grande avant 30 ans qu'après. A cette époque, seulement 3% des habitants avaient plus de 70 ans, contre 12% actuellement, soit une proportion quatre fois plus élevée. En 1860, le groupe des moins de 20 ans représentait près de 40% de la population contre 21% aujourd'hui, soit une proportion réduite de moitié. En 1860, la classe la plus représentée est celle des 0 à 10 ans, avec 20.6% des habitants, alors qu'en 2009, c'est la classe des 40 à 50 ans avec 16.4% des habitants. »

5.1.13

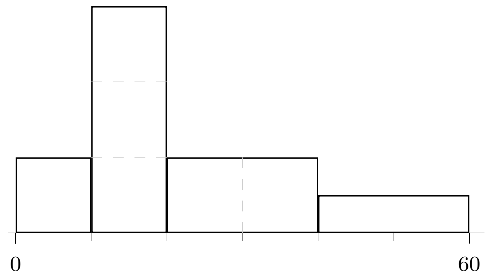
a)

Amplitude	Classe	Effectif	Effectif rectifié
30	[10 ; 40 [	12	4
10	[40 ; 50 [	20	20
10	[50 ; 60 [	18	18
20	[60 ; 80 [	10	5
	Total	60	



b)

	Pourcentage
[0; 10[	14.3% (1/7)
[10; 20[	42.9% (3/7)
[20; 40[	28.6% (2/7)
[40; 60[	14.3% (1/7)
Total	100%

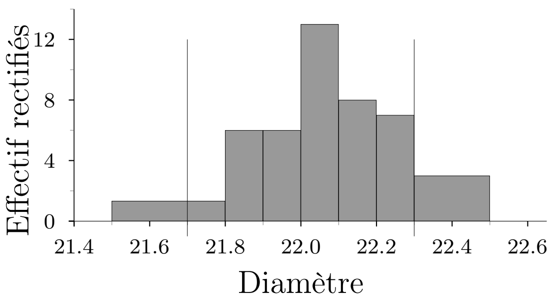


c) $\dfrac{\text{Aire de la portion comprise entre les abscisses 50 et 60}}{\text{Aire totale du polygone}} = \dfrac{2}{8} = 25\%.$

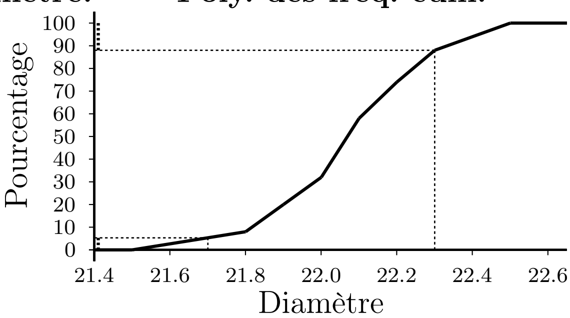
5.1.14

a) Population étudiée : Tous les boulons de la production, variable : diamètre des boulons, variable quantitative continue, échelle de rapport.

Répartition de 50 boulons selon leur diamètre.



Poly. des fréq. cum.



d) $\dfrac{4}{50} \cdot \dfrac{2}{3} = 5.3\%$ des boulons ont un diamètre < 21.7 mm et $\dfrac{6}{50} = 12\%$ ont un diamètre > 22.3 mm. Ainsi, 17.3% des boulons ont un diamètre qui s'écarte de plus de 0.3 mm de la valeur nominale.

5.1.15

a) moyenne : $\bar{x} = 4.04$ médiane : $\tilde{x} = 4$ mode : $M = 5$

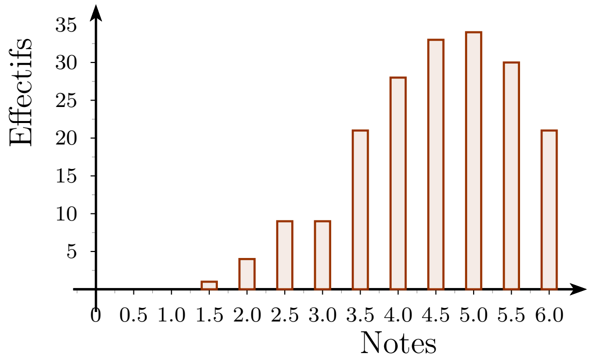
b) moyenne : $\bar{x} = 0$ médiane : $\tilde{x} = 0.05$ le mode n'existe pas

c) moyenne : $\bar{x} = 302$ médiane : $\tilde{x} = 290$ classe modale : $[400; 500[$

d) moyenne : $\bar{x} = 3.4$ médiane : $\tilde{x} \cong 3.43$ classe modale : $[3; 4[$

5.1.16 a) On étudie l'ensemble des travaux écrits passés par les élèves de cette classe. La variable est la note qui figure sur le travail après correction. Il s'agit d'une variable quantitative discrète qui peut prendre 11 valeurs.

b)



c)

Note	Effectif	Fréquence [%]
1.5	1	0.5
2	4	2.1
2.5	9	4.7
3	9	4.7
3.5	21	11.1
4	28	14.7
4.5	33	17.4
5	34	17.9
5.5	30	15.8
6	21	11.1
Total	190	100

d) le mode vaut 5, la médiane $\tilde{x} = 4.5$ et la moyenne $\bar{x} \cong 4.49$

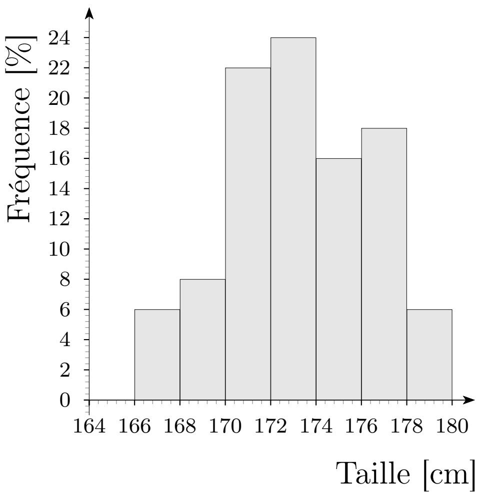
5.1.17

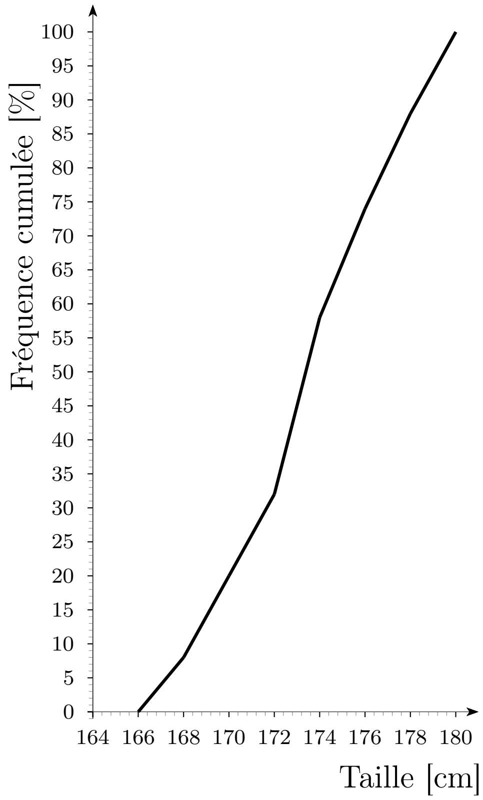
a) La variable étudiée est la taille en centimètres, variable quantitative continue.

b)

Taille [cm]	Effectif	Fréq.	Fréq. cumulées
$[166; 168[$	3	6%	6%
$[168; 170[$	4	8%	14%
$[170; 172[$	11	22%	36%
$[172; 174[$	12	24%	60%
$[174; 176[$	8	16%	76%
$[176; 178[$	9	18%	94%
$[178; 180[$	3	6%	100 %
Total	50	100%	-

c) **Répartition de 50 hommes selon leur taille en cm.**





d) La classe modale : $[172; 174[$, la médiane $\tilde{x} \cong 173.17$, la moyenne $\overline{x} \cong 173.28$

5.1.18 Soit x le nombre de femmes. On peut écrire

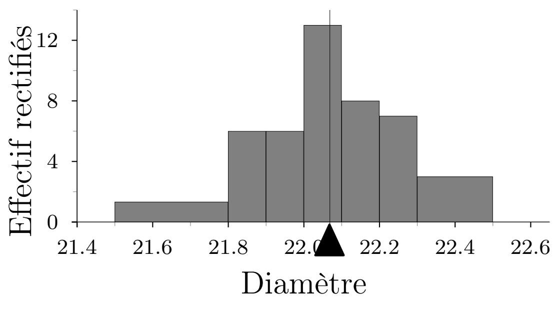
$$x \cdot 1.61 + (41\,250\,000 - x) \cdot 1.74 = 41\,250\,000 \cdot 1.67$$

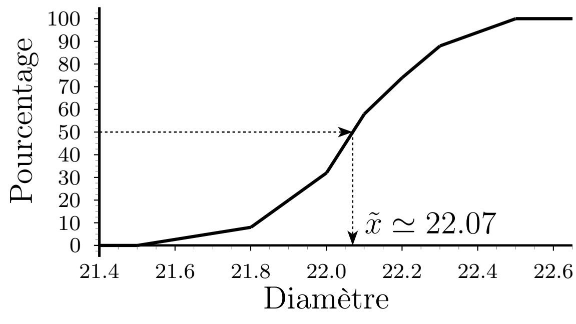
Et donc, $x \simeq 21\,211\,538.46 \simeq 21\,211\,538$, vu que l'on de considère pas des fractions de personnes.
Il y a donc 3 173 077 femmes de plus que d'hommes.

5.1.19 La cinquième note est 5.6

5.1.20 a) $\bar{x}_{1860} = 29.1$ ans, $\bar{x}_{2009} = 41.4$ ans **b)** $\tilde{x}_{1860} = 26.1$ ans, $\tilde{x}_{2009} = 41.4$ ans **c)** 0 à 10 ans pour 1860 et 40 à 50 ans pour 2009. Ces classes modales sont peu significatives car leurs effectifs ne sont pas beaucoup plus élevés que ceux des autres grandes classes. **d)** En 1860, l'âge moyen est plus élevé que l'âge médian, car les quelques personnes très âgées tirent la moyenne vers le haut. En 2009, les âges moyen et médian sont identiques, car la répartition de la population autour de ces mesures est symétrique. **e)** La population est plus vieille en 2009 qu'en 1860.

5.1.21





a) $\bar{x} = 22.068$ mm **b)** $\tilde{x} = 22.069$ mm **c)** La classe modale [22.0 ; 22.1[est significative car son effectif est nettement plus élevé que ceux des autres classes. **d)** La classe modale contient la moyenne et la médiane qui sont très proches. La distribution est de type normale, en forme de cloche.

5.1.22

a) variance : $s^2 = 1.9584$ écart-type : $s \cong 1.40$

b) variance : $s^2 = 0.306$ écart-type : $s \cong 0.55$

c) variance : $s^2 = 16096$ écart-type : $s \cong 126.87$

d) variance : $s^2 = 1.135$ écart-type : $s \cong 1.07$

5.1.23

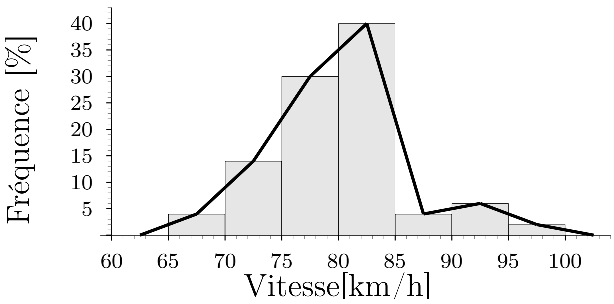
a) On étudie la vitesse des véhicules, variable quantitative continue.

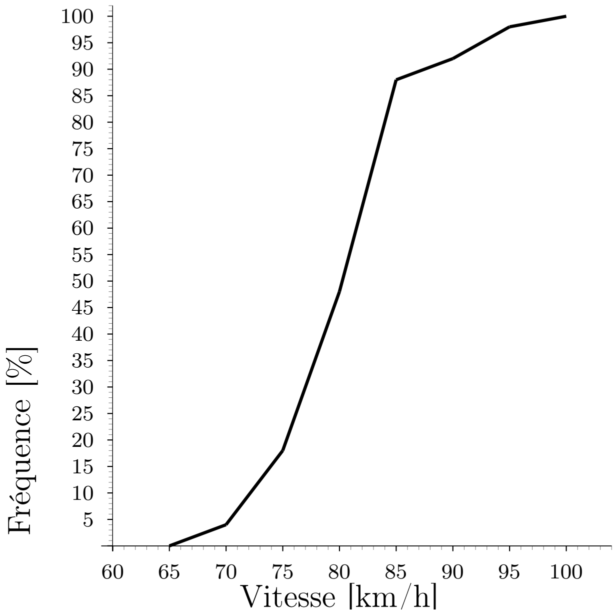
b) Classe modale : [80 ;85 [

c)

Vitesse [km/h]	Effectif	Frq.	Frq. cum
[65; 70[	2	4%	4%
[70; 75[	7	14 %	18%
[75; 80[	15	30%	48%
[80; 85[	20	40%	88%
[85; 90[	2	4%	92%
[90; 95[	3	6%	98%
[95; 100[	1	2%	100%
Total	50	100%	-

Répartition de 50 véhicules selon leur vitesse.





g) Moyenne $\bar{x} = 80,1$ km/h. Ecart-type $s \cong 6,02$.

5.1.24

a) C'est la série A. En effet, il y a plus d'écart à la moyenne dans une famille que dans une classe.

b) Plus l'écart-type est faible, plus les résultats sont proches. C'est donc dans la deuxième classe que les élèves ont à peu près le même niveau sur ce sujet.

c) L'écart-type et la moyenne sont tous les deux nuls, car aucune des données n'est inférieure à 0. On peut aussi écrire $s = \overline{x} = 0$

d) Nouvelle moyenne : $\overline{x}' = 18.16$. Nouvel écart-type : $s' = s = 0.76$.

e) C'est faux ; une part importante des données est comprise entre 60 et 80, mais pas toutes.

5.1.25 Une pluralité de notes sont comprises entre 3.37 et et 5.03, c'est-à-dire entre 3.5 et 5.0 si les notes sont arrondies au demi-point.

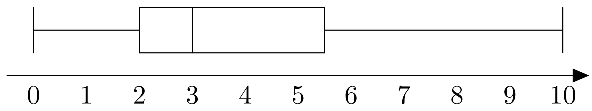
5.1.26 $\bar{x} = 9.822$ et $s = 0.222$.
Une pluralité de mesures donne une accélération comprise entre 9.600 et 10.044 m/s^2.

5.1.27 **a)** $\bar{x} = 80.1 \quad s = 6.0$. Une pluralité de véhicules roulent entre 74.1 km/h et 86.1 km/h.
b) coefficient de variation $= \dfrac{6.0}{80.1} = 0.075 = 7.5\% < 15\%$. Les données sont homogènes.

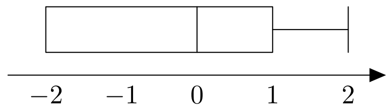
5.1.28 **a)** $y = \dfrac{x}{4} + 1$ et $x = 4 \cdot (y - 1)$ **b)** La classe française. **c)** Les notes suisses se mesurent sur une échelle d'intervalle et non de rapport. De plus, dans les deux cas, les notes sont bornées supérieurement.
d) $\dfrac{1.2}{6-1} = 0.24 < \dfrac{5.3}{20-0} = 0.263$. La classe suisse est plus homogène que la française.

5.1.29

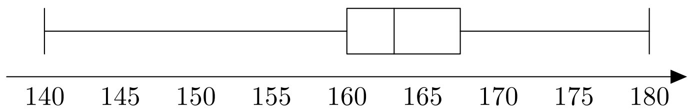
a) $Q_1 = 2 \quad \tilde{x} = 3 \quad Q_3 = 5.5$



b) $Q_1 = -2 \quad \tilde{x} = 0 \quad Q_3 = 1$



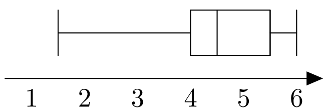
c) $Q_1 = 160 \quad \tilde{x} = 163.125 \quad Q_3 = 167.5$



5.1.30 a) $s^2 \cong 1.074$ écart-type : $s \cong 1.04$

b) Q_1, 48^e valeur $\Rightarrow Q_1 = 4$, médiane $\tilde{x} = \dfrac{4.5 + 4.5}{2} = 4.5$
et Q_3, 143^e valeur $\Rightarrow Q_3 = 5,5$,

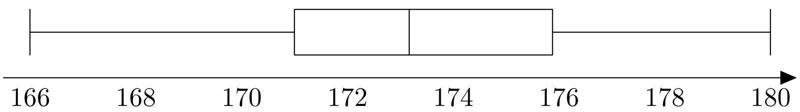
c)



5.1.31 a) $s^2 \cong 9.92$ écart-type : $s \cong 3.15$

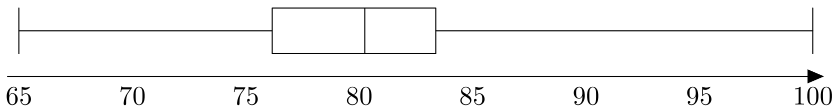
b) $Q_1 = 171$ cm $\quad \tilde{x} \cong 173,17 \quad Q_3 \cong 175,88$ cm

c)



5.1.32 a) $Q_1 \cong 76.17 \qquad \tilde{x} = 80.25 \qquad Q_3 \cong 83.38$

b)



5.1.33

a) Variable quantitative continue (traitée comme discrète).

b) La médiane vaut 20.5 et la moyenne $\overline{x} = 23.55$ et le mode vaut 19. La médiane est la mesure la plus appropriée, car elle n'est pas influencée par les très grandes valeurs contrairement à la moyenne. Le mode ne présente pas une fréquence suffisante par rapport aux autres valeurs.

c) Il y a 80% des candidats qui ont moins de 25 ans.

d) On calcule la cote z comme suit :

$$z = \frac{57 - 23.55}{8.93} \simeq 3.75$$

L'âge du candidat est très éloigné de la moyenne. Cela constitue une exception.

e) Si la cote z vaut -1, cela implique que $x \simeq 14.62 < 18$. Cette situation ne peut pas se produire, vu que l'âge minimal pour se présenter à l'examen du permis de conduire est de 18 ans !

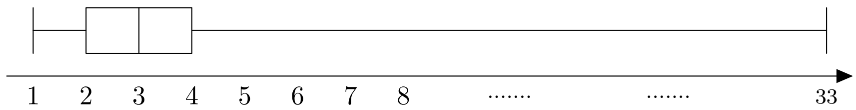
5.1.34 On a calculé la cote z du nombre d'objets vendus pour chacun des élèves concernés:

$$z_E \simeq 2.54 \qquad z_F \simeq 2.17 \qquad z_G = 2.8$$

C'est Georges qui obtiendra le prix, vu que la cote z de ses ventes est la plus élevée.

5.1.35

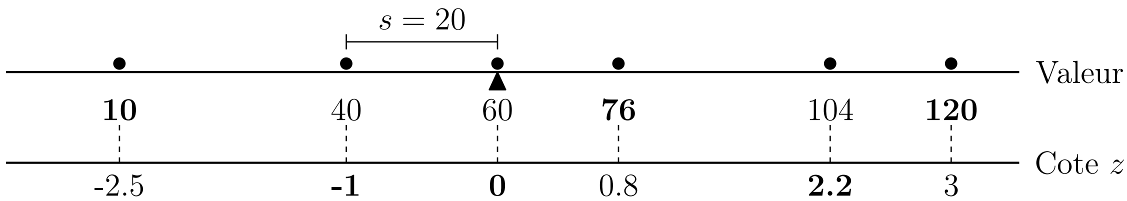
a) $Q_1 = 2 \quad \tilde{x} = 3 \quad Q_3 = 4$



b) $z \simeq (20 - 4.6)/5.55 \simeq 2.77$

c) Si $z = -1$, alors $x = -0.95$ et donc $x = 1$. Si $z = 1$, alors $x = 10.15$. L'ensemble des valeurs de cette variable comprises entre 1 et 10 représentent le 95% de toutes les valeurs. On peut donc affirmer que 95% des bébés sont restés entre 1 et 10 jours.

5.1.36

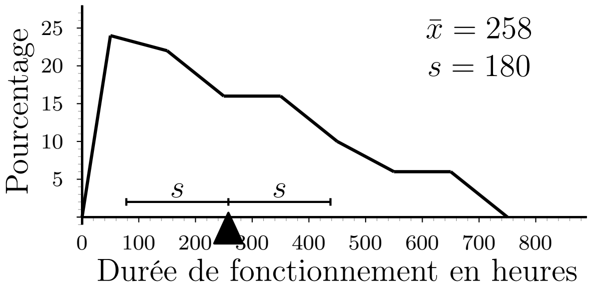


5.1.37 a) Le nombre de points obtenus est une variable quantitative discrète, mesurée sur une échelle de rapport. Titre du graphique : Répartition de 54 écoles suisses selon le nombre de points obtenus au concours.
b) $\bar{x} \simeq 55.37$; $s \simeq 18.85$. Une pluralité d'écoles ont obtenus entre 37 et 74 points.
c) $z_{110} \simeq 2.9$ et $x_{-2} \simeq 18$ points. **d)** $CV = 34\% > 15\%$. Les résultats ne sont pas du tout homogènes.

5.1.38
a) Répartition de 50 piles à combustible selon leur durée de fonctionnement.

Durée [h]	Effectif	Pourcentage
$[0; 100[$	12	24%
$[100; 200[$	11	22%
$[200; 300[$	8	16%
$[300; 400[$	8	16%
$[400; 500[$	5	10%
$[500; 600[$	3	6%
≥ 600	3	6%
Total	50	100%

b) Polygone des fréquences.

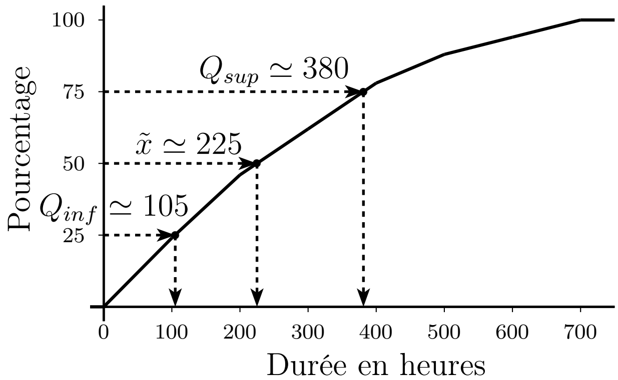


Une pluralité de piles ont une durée de fonctionnement comprise entre 78 et 438 heures.

c) $z_{min} = \dfrac{2-258}{180} = -1.42$ et $z_{max} = \dfrac{954-258}{180} = 3.87$.

D'après les cotes z, une durée de fonctionnement de 954 heures est exceptionnelle alors qu'une durée de fonctionnement de 2 heures ne constitue pas un cas particulièrement rare. Cette dernière interprétation n'est toutefois pas valide pour ces données dont la plus petite cote z possible est $\dfrac{0-258}{180} = -1.4\bar{3}$.

d) Polygone des fréquences cumulées.



e) 50% des piles fonctionnent entre 105 et 380 heures, 25% des piles fonctionnent moins de 105 heures et 25% des piles plus de 380 heures.

A partir des données brutes, on obtient les quartiles suivants :
$Q_0 = x_{min} = 2, \quad Q_1 = Q_{inf} = 104,$
$Q_2 = \bar{x} = 215.5, \quad Q_3 = Q_{sup} = 335,$
$Q_4 = x_{max} = 954.$
Par calcul sur les données regroupées en classe, on obtient les valeurs suivantes :
$Q_0 = 0, \quad Q_1 = 104.5, \quad Q_2 = 225,$
$Q_3 = 381.25, \quad Q_4 = 700$

f) 3% des piles de l'échantillon ont duré moins de $a = \dfrac{3\%}{24\%} \cdot 100 = 12.5$ heures.
Ainsi, les piles ayant duré moins de 12.5 heures devraient être remplacées gratuitement.