Changement de base en dimension 2 – **Série 1**

Exercice 1

Soit les bases suivantes :

— La base canonique : $\mathcal{B} = \left\{ \vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

— Une deuxième base : $\mathcal{B}' = \left\{ \vec{f_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{f_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

Soit le vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ donné dans la base $\mathcal{B}$. Exprimer $\vec{v}$ dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 2

Soit les bases suivantes :

— La base canonique : $\mathcal{B} = \left\{ \vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

— Une deuxième base : $\mathcal{B}' = \left\{ \vec{f_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{f_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$.

Soit le vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \end{pmatrix}$ donné dans la base $\mathcal{B}$. Exprimer $\vec{v}$ dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 3

Soit les bases suivantes :

— La base canonique : $\mathcal{B} = \left\{ \vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

— Une deuxième base : $\mathcal{B}' = \left\{ \vec{f_1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \vec{f_2} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix} \right\}$.

Soit le vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{7}{6} \\ \frac{5}{6} \end{pmatrix}$ donné dans la base $\mathcal{B}$. Exprimer $\vec{v}$ dans la base $\mathcal{B}'$.

Solutions

Exercice 1

Pour exprimer $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}'$, il faut trouver les scalaires a et b tels que :

$$\vec{v} = a\vec{f_1} + b\vec{f_2}$$

Autrement dit :

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Cela revient à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} a + b = 2 \\ a - b = 3 \end{cases}$$

En résolvant ce système :

- En additionnant les deux équations : $(a+b)+(a-b) = 2+3 \implies 2a = 5 \implies a = \frac{5}{2}$.
- En substituant $a = \frac{5}{2}$ dans la première équation : $\frac{5}{2} + b = 2 \implies b = 2 - \frac{5}{2} = -\frac{1}{2}$.

Ainsi, les coordonnées de $\vec{v}$ dans la base $\mathcal{B}'$ sont :

$$\boxed{\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}}$$

Exercice 2

Pour exprimer $\vec{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}'$, il faut trouver les scalaires a et b tels que :

$$\vec{v} = a\vec{f_1} + b\vec{f_2}$$

Autrement dit :

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 10 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Cela revient à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 2a + b = 7 \\ 3a + 2b = 10 \end{cases}$$

Résolution du système - À partir de la première équation : $b = 7 - 2a$. - Remplaçons cette expression dans la deuxième équation :

$$3a + 2(7 - 2a) = 10$$

Ce qui donne :

$$3a + 14 - 4a = 10 \quad \Rightarrow \quad -a = -4 \quad \Rightarrow \quad a = 4.$$

- En remplaçant $a = 4$ dans $b = 7 - 2a$, on trouve :

$$b = 7 - 2 \times 4 = 7 - 8 = -1.$$

Ainsi, les coordonnées de $\vec{v}$ dans la base $\mathcal{B}'$ sont :

$$\boxed{\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

Exercice 3

Pour exprimer $\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{7}{6} \\ \frac{5}{6} \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}'$, il faut trouver les scalaires a et b tels que :

$$\vec{v} = a\vec{f_1} + b\vec{f_2}$$

Autrement dit :

$$\begin{pmatrix} \frac{7}{6} \\ \frac{5}{6} \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Cela revient à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{a}{2} + \frac{2b}{3} = \frac{7}{6} \\ \frac{a}{3} + \frac{b}{6} = \frac{5}{6} \end{cases}$$

Pour simplifier les équations :

— Multiplions la première équation par 6 pour éliminer les dénominateurs : $3a + 4b = 7$.

— Multiplions la deuxième équation par 6 également : $2a + b = 5$.

Nous avons donc le système :

$$\begin{cases} 3a + 4b = 7 \\ 2a + b = 5 \end{cases}$$

Résolution du système

- À partir de la deuxième équation : $b = 5 - 2a$. - Remplaçons cette expression dans la première équation :

$$3a + 4(5 - 2a) = 7$$

Ce qui donne :

$$3a + 20 - 8a = 7 \quad \Rightarrow \quad -5a = -13 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{13}{5}.$$

- En remplaçant $a = \frac{13}{5}$ dans $b = 5 - 2a$, on trouve :

$$b = 5 - 2 \times \frac{13}{5} = 5 - \frac{26}{5} = \frac{25}{5} - \frac{26}{5} = -\frac{1}{5}.$$

Ainsi, les coordonnées de $\vec{v}$ dans la base $\mathcal{B}'$ sont :

$$\boxed{\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{13}{5} \\ -\frac{1}{5} \end{pmatrix}}$$