

Matrice échelonnée réduite 1

Forme échelonnée réduite

Une matrice est sous forme échelonnée réduite si elle satisfait aux trois conditions suivantes :

- À chaque ligne, l'élément non nul le plus à gauche est 1 et les autres éléments de la colonne qui contient ce 1 sont tous nuls. Ce 1 est un pivot de la matrice.
- Le pivot de chaque ligne est à la droite des pivots des lignes supérieures.
- Chaque ligne ne contenant que des éléments nuls se retrouve au bas de la matrice.

Élimination de Gauss-Jordan

L'élimination de Gauss-Jordan permet de transformer une matrice donnée en une matrice équivalente sous sa forme échelonnée réduite.

Cet algorithme permet de trouver, par exemple, les solutions d'un système d'équations linéaire.

$$1) L_i \leftarrow \alpha \cdot L_i$$

On remplace la i -ème ligne par le produit de α et de L_i , avec $\alpha \neq 0$.

$$2) L_i \leftarrow L_i + \alpha \cdot L_j$$

On remplace la i -ème ligne par la somme de la i -ème ligne et du produit de α et de L_j , avec $\alpha \neq 0$ et $i \neq j$.

$$3) L_i \leftrightarrow L_j$$

On échange la ligne i et la ligne j , $i \neq j$.

Problème 1

Les matrices suivantes sont-elles sous la forme échelonnée réduite ?

$$a) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$c) C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b) B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$d) D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Problème 2

Chacune des matrices suivantes est une matrice augmentée associée à un système d'équations linéaires rationnels. Déterminez si le système n'admet aucune solution, s'il admet une solution unique ou une infinité de solutions.

$$a) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$c) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Problème 3

Faire la liste des matrices à coefficients réels de taille 2×2 échelonnées réduites.

Solutions

Exercice 1

- a) L'élément non nul le plus à gauche de la deuxième ligne n'est pas égal à 1, ce qui contredit la première propriété.
- b) Le pivot de la deuxième ligne est à gauche du pivot de la première ligne, ce contredit la seconde propriété.
- c) Le pivot de la troisième ligne n'est pas le seul élément non nul dans sa colonne, ce qui contredit la première propriété.
- d) La deuxième ligne ne contient que des éléments nuls mais elle ne se retrouve pas au bas de la matrice, ce qui contredit la troisième propriété.

Exercice 2

- a) Aucune solution.
- b) Solution unique.
- c) Solution unique.

Exercice 3

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$