Matrice échelonnée réduite 1

Forme échelonnée réduite

Une matrice est sous forme échelonnée réduite si elle satisfait aux trois conditions suivantes :

a) À chaque ligne, l'élément non nul le plus à gauche est 1 et les autres éléments de la colonne qui contient ce 1 sont tous nuls. Ce 1 est un pivot de la matrice.

b) Le pivot de chaque ligne est à la droite des pivots des lignes supérieures.

c) Chaque ligne ne contenant que des éléments nuls se retrouve au bas de la matrice.

Élimination de Gauss-Jordan

L'élimination de Gauss-Jordan permet de transformer une matrice donnée en une matrice équivalente sous sa forme échelonnée réduite.
Cet algorithme permet de trouver, par exemple, les solutions d'un système d'équations linéaire.

1) $L_i \leftarrow \alpha \cdot L_i$
On remplace la i-ème ligne par le produit de α et de L_i, avec $\alpha \neq 0$.

2) $L_i \leftarrow L_i + \alpha \cdot L_j$
On remplace la i-ème ligne par la somme de la i-ème ligne et du produit de α et de L_j, avec $\alpha \neq 0$ et $i \neq j$.

3) $L_i \leftrightarrow L_j$
On échange la ligne i et la ligne j, $i \neq j$.

Problème 1
Les matrices suivantes sont-elles sous la forme échelonnée réduite ?

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

d) $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Problème 2
Chacune des matrices suivantes est une matrice augmentée associée à un système d'équations linéaires rationnels. Déterminez si le système n'admet aucune solution, s'il admet une solution unique ou une infinité de solutions.

a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Problème 3
Faire la liste des matrices à coefficients réels de taille 2x2 échelonnées réduites.

Solutions

Exercice 1

a) L'élément non nul le plus à gauche de la deuxième ligne n'est pas égal à 1, ce qui contredit la première propriété.
b) Le pivot de la deuxième ligne est à gauche du pivot de la première ligne, ce contredit la seconde propriété.
c) Le pivot de la troisième ligne n'est pas le seul élément non nul dans sa colonne, ce qui contredit la première propriété.
d) La deuxième ligne ne contient que des éléments nuls mais elle ne se retrouve pas au bas de las matrice, ce qui contredit la troisième propriété.

Exercice 2

a) Aucune solution.
b) Solution unique.
c) Solution unique.

Exercice 3

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrice échelonnée réduite 1

Forme échelonnée réduite

Une matrice est sous forme échelonnée réduite si elle satisfait aux trois conditions suivantes :

a) À chaque ligne, l'élément non nul le plus à gauche est 1 et les autres éléments de la colonne qui contient ce 1 sont tous nuls. Ce 1 est un pivot de la matrice.

b) Le pivot de chaque ligne est à la droite des pivots des lignes supérieures.

c) Chaque ligne ne contenant que des éléments nuls se retrouve au bas de la matrice.

Élimination de Gauss-Jordan

L'élimination de Gauss-Jordan permet de transformer une matrice donnée en une matrice équivalente sous sa forme échelonnée réduite.
Cet algorithme permet de trouver, par exemple, les solutions d'un système d'équations linéaire.

1) $L_i \leftarrow \alpha \cdot L_i$
   On remplace la i-ème ligne par le produit de α et de L_i, avec $\alpha \neq 0$.

2) $L_i \leftarrow L_i + \alpha \cdot L_j$
   On remplace la i-ème ligne par la somme de la i-ème ligne et du produit de α et de L_j, avec $\alpha \neq 0$ et $i \neq j$.

3) $L_i \leftrightarrow L_j$
   On échange la ligne i et la ligne j, $i \neq j$.

Problème 1
Les matrices suivantes sont-elles sous la forme échelonnée réduite ?

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

d) $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Problème 2
Chacune des matrices suivantes est une matrice augmentée associée à un système d'équations linéaires rationnels. Déterminez si le système n'admet aucune solution, s'il admet une solution unique ou une infinité de solutions.

a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Problème 3
Faire la liste des matrices à coefficients réels de taille 2x2 échelonnées réduites.

Solutions

Exercice 1

a) L'élément non nul le plus à gauche de la deuxième ligne n'est pas égal à 1, ce qui contredit la première propriété.

b) Le pivot de la deuxième ligne est à gauche du pivot de la première ligne, ce contredit la seconde propriété.

c) Le pivot de la troisième ligne n'est pas le seul élément non nul dans sa colonne, ce qui contredit la première propriété.

d) La deuxième ligne ne contient que des éléments nuls mais elle ne se retrouve pas au bas de las matrice, ce qui contredit la troisième propriété.

Exercice 2

a) Aucune solution.

b) Solution unique.

c) Solution unique.

Exercice 3

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$