

Géométrie 1 – TE 839A

Problème	1	2	3	4	5	6	7	Total
Points	2	3	4	6	6	4	4	29
Points obtenus								

Problème 1 (2 points)

Relativement à une base $\mathfrak{B}$ de V_2 , on donne les vecteurs

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -10 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 35 \\ -28 \end{pmatrix}$$

Calculer les composantes du vecteur $\vec{v} = -2\vec{a} + 3\vec{b} + \vec{c}$.

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -10 \\ 14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -30 \\ 24 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 35 \\ -28 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -5 \\ 10 \end{pmatrix}}}$$

Problème 2 (3 points)

Soit les points du plan $A(-4; 10)$ et $P(3; -2)$.

a) Déterminer les composantes du vecteur $\vec{PA}$.

b) Calculer les coordonnées du point M sachant que $\vec{MA} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$.

$$a) \quad \vec{PA} = \begin{pmatrix} -4 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -7 \\ 12 \end{pmatrix}}}$$

$$b) \quad \vec{OM} = \vec{OA} + \vec{AM} = \begin{pmatrix} -4 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 14 \end{pmatrix}$$

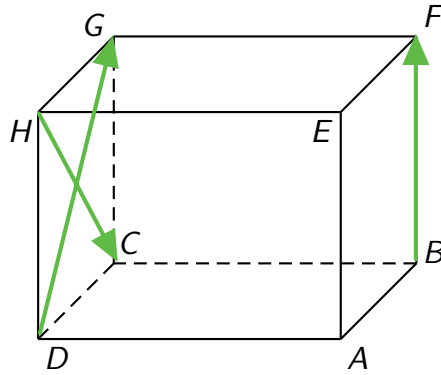
$$\Rightarrow \underline{\underline{M(-7, 14)}}$$

Problème 3 (4 points)

On considère le parallélépipède $ABCD EFGH$ représenté sur la figure. Déterminer si les trois vecteurs

$$\overrightarrow{BF}, \overrightarrow{HC} \text{ et } \overrightarrow{DG}$$

sont coplanaires. Si tel est le cas, exprimer le premier vecteur comme combinaison linéaire des deux autres. Dans le cas contraire, justifier brièvement.



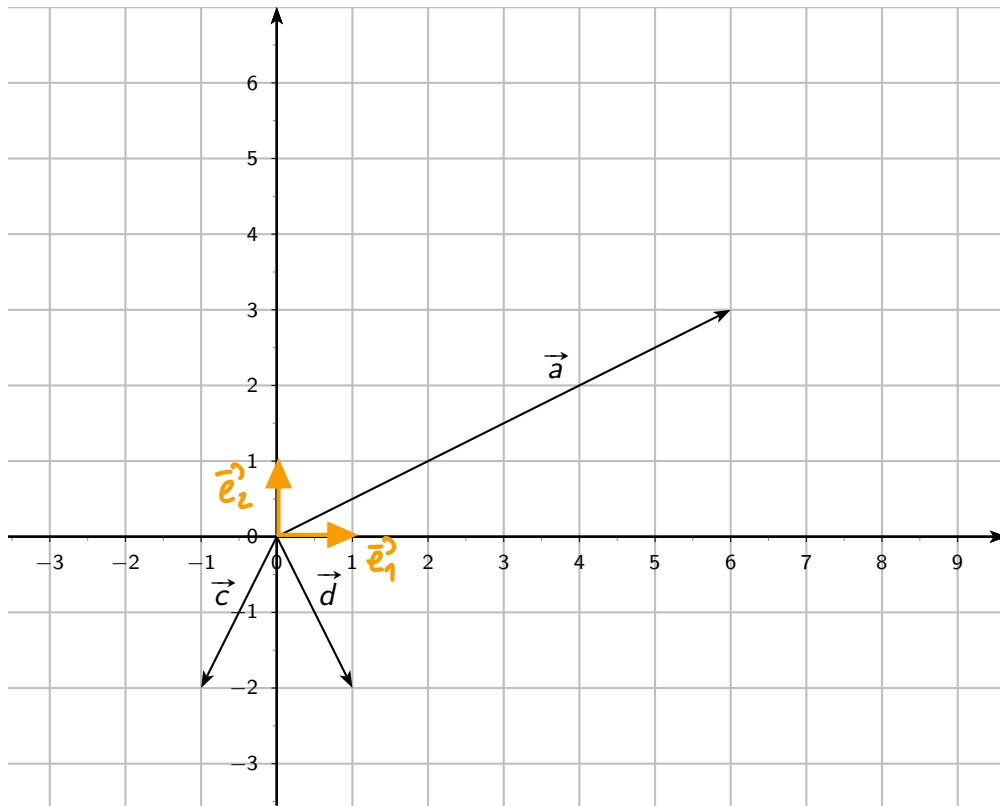
① $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{CG}$

Les 3 vecteurs sont dans le plan vectoriel DHG .

$\overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{HC}$ et $\overrightarrow{DG}$ sont coplanaires.

② $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{2} \overrightarrow{DG} - \frac{1}{2} \overrightarrow{HC}$.

Problème 4 (6 points)



Exprimer le vecteur $\vec{a}$ comme combinaison linéaire de $\vec{c}$ et $\vec{d}$.

$$\textcircled{1} \begin{cases} \vec{d} = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 \\ \vec{c} = -\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 \end{cases} \begin{vmatrix} \cdot 1 & \cdot 1 \\ \cdot 1 & \cdot (-1) \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \vec{d} + \vec{c} = -4\vec{e}_2 \\ \vec{d} - \vec{c} = 2\vec{e}_1 \end{cases}$$

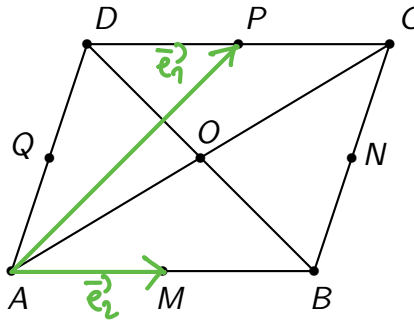
$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{e}_1 = -\frac{1}{2}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{d} \\ \vec{e}_2 = -\frac{1}{4}\vec{c} - \frac{1}{4}\vec{d} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad \vec{a} &= 6\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 \\ &= -3\vec{c} + 3\vec{d} - \frac{3}{4}\vec{c} - \frac{3}{4}\vec{d} \\ &= -\frac{15}{4}\vec{c} + \frac{9}{4}\vec{d} \end{aligned}$$

$$\vec{a} = -\frac{15}{4}\vec{c} + \frac{9}{4}\vec{d}$$

Problème 5 (6 points)

Les points M , N , P et Q sont les milieux des côtés du parallélogramme $ABCD$.



Donner, dans la base $B = (\underbrace{\overrightarrow{AP}}_{\vec{e}_1}; \underbrace{\overrightarrow{AM}}_{\vec{e}_2})$, les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AN}$.

$$1) \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$2) \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PC} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$3) \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{ON} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} + \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$$

Problème 6 (4 points)

Déterminer si les trois vecteurs ci-dessous sont coplanaires.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -10 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 15 \\ -10 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Justifier la réponse.

Les vecteurs sont coplanaires $\Leftrightarrow |\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}| = 0$

$$\begin{vmatrix} 4 & -10 & 15 \\ -3 & 5 & -10 \\ 1 & 7 & -1 \end{vmatrix} = -20 + 100 - 315$$
$$-75 + 280 + 30 = 0$$

$\Rightarrow \vec{a}, \vec{b}$ et $\vec{c}$ sont coplanaires.

Problème 7 (4 points)

Les points du plan $A(1; -4)$, $B(8; -1)$ et $C(-55; -28)$ sont-ils alignés?

Justifier la réponse.

$$A, B, C \text{ alignés} \Leftrightarrow \vec{AB} \text{ et } \vec{AC}$$

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} -55 \\ -28 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -56 \\ -24 \end{pmatrix} = -8 \underbrace{\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\vec{AB}}$$

$$\vec{AC} = -8 \vec{AB} \Rightarrow \vec{AC} \text{ et } \vec{AB} \Rightarrow A, B, C \text{ alignés}$$