1M7 – 24 septembre 2025 Nom & prénom : ....

Géométrie 1 – TE 839B

Problème	1	2	3	4	5	6	7	**Total**
Points	2	3	4	6	6	4	4	29
Points obtenus								

Problème 1 (2 points)
Relativement à une base $\mathfrak{B}$ de V_2, on donne les vecteurs Relativement à une base $\mathfrak{B}$ de V_2, on donne les vecteurs

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -5 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -12 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 27 \\ 24 \end{pmatrix}$$

Calculer les composantes du vecteur $\vec{v} = -3\,\vec{a} + 2\,\vec{b} + \vec{c}$.

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 15 \\ -27 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -24 \\ 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 27 \\ 24 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 18 \\ 9 \end{pmatrix}}$$

Problème 2 (3 points)
Soit les points du plan $M(6\,;\,-8)$ et $T(2\,;\,-3)$.

a) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{TM}$.

b) Calculer les coordonnées du point A sachant que $\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix}$.

a) $\overrightarrow{TM} = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}}$

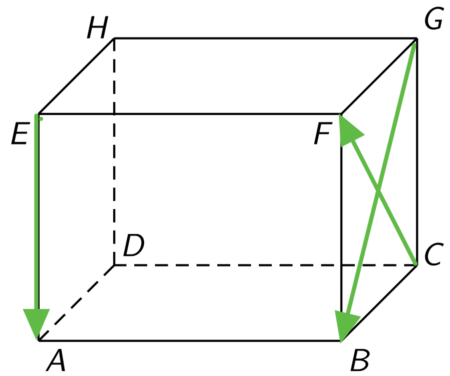
b) $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MA} = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \underline{A(2\,;\,-2)}$

Problème 3 (4 points)
On considère le parallélépipède $ABCD\ EFGH$ représenté sur la figure. Déterminer si les trois vecteurs

$$\overrightarrow{EA}, \quad \overrightarrow{GB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CF}$$

sont coplanaires. Si tel est le cas, exprimer le premier vecteur comme combinaison linéaire des deux autres. Dans le cas contraire, justifier brièvement.

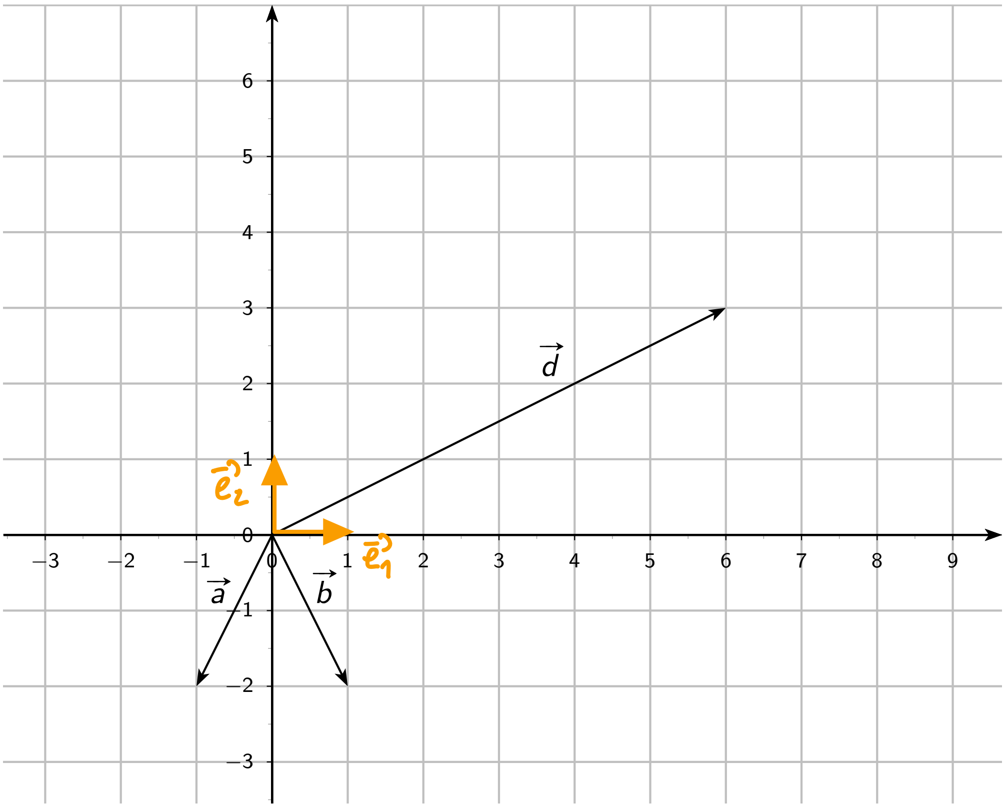


① $\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{FB}$
Les 3 vecteurs sont dans le plan vectoriel GFB.

$\overrightarrow{EA}$, $\overrightarrow{GB}$ et $\overrightarrow{CF}$ sont coplanaires.

② $\overrightarrow{EA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CF}$.

Problème 4 (6 points)



Exprimer le vecteur $\vec{d}$ comme combinaison linéaire de $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

(1) $\begin{cases} \vec{b} = \vec{e_1} - 2\vec{e_2} \\ \vec{a} = -\vec{e_1} - 2\vec{e_2} \end{cases} \left| \begin{array}{c} \cdot 1 \\ \cdot 1 \end{array} \right| \begin{array}{c} \cdot 1 \\ \cdot(-1) \end{array} \Rightarrow \begin{cases} \vec{a} + \vec{b} = -4\vec{e_2} \\ \vec{b} - \vec{a} = 2\vec{e_1} \end{cases}$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \vec{e_1} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} \\ \vec{e_2} = -\frac{1}{4}\vec{a} - \frac{1}{4}\vec{b} \end{array}}$$

(2) $\vec{d} = 6\vec{e_1} + 3\vec{e_2}$

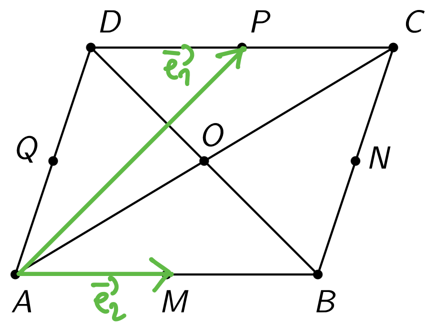
$= -3\vec{a} + 3\vec{b} - \frac{3}{4}\vec{a} - \frac{3}{4}\vec{b}$

$= -\frac{15}{4}\vec{a} + \frac{9}{4}\vec{b}$

$$\boxed{\vec{d} = -\frac{15}{4}\vec{a} + \frac{9}{4}\vec{b}}$$

Problème 5 (6 points)

Les points M, N, P et Q sont les milieux des côtés du parallélogramme $ABCD$.



Donner, dans la base $B = \left(\underbrace{\overrightarrow{AP}}_{\vec{e_1}}; \underbrace{\overrightarrow{AM}}_{\vec{e_2}}\right)$, les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AN}$.

1) $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

2) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PC} = \vec{e_1} + \vec{e_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

3) $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \vec{e_2} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$

Problème 6 (4 points)
Déterminer si les trois vecteurs ci-dessous sont coplanaires.

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 14 \\ -9 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Justifier la réponse.

Les vecteurs sont coplanaires $\Leftrightarrow \left| \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \right| = 0$

$$\left| \begin{array}{ccc|cc} 4 & -8 & 14 & 4 & -8 \\ -3 & 3 & -9 & -3 & 3 \\ 1 & 9 & -2 & 1 & 9 \end{array} \right. = -24 + 72 - 378 - 42 + 324 + 48$$

$$= 0$$

$\Rightarrow \vec{a}, \vec{b}$ et $\vec{c}$ sont coplanaires.

Problème 7 (4 points)
Les points du plan $A(-9\,;\,5)$, $B(-2\,;\,1)$ et $C(-47\,;\,-27)$ sont-ils alignés ?
Justifier la réponse.

A, B, C alignés $\iff \overrightarrow{AB} \backsim \overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -9 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -47 \\ -27 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -9 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -38 \\ -32 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 7 & -38 \\ -4 & -32 \end{vmatrix} = -376 \neq 0$$

$\Rightarrow A, B, C$ non alignés.