1M7 – 19 novembre 2025 Nom & prénom : ....

Géométrie 2 – TE 842A

Problème	1	2	3	4	Total
Points	4	3	4	9	20
Points obtenus					

Problème 1 (4 points)

Démontrer que pour tout couple $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ de vecteurs du plan, la relation suivante est vérifiée.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} \underbrace{\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 \right)}_{*}$$

Méthode 1 :

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = (\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u}\cdot\vec{u} + 2\cdot\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\vec{v}$$
$$= \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\cdot\vec{u}\cdot\vec{v}$$
$$\Rightarrow \quad 2\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$$
$$\Rightarrow \quad \vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$$

Méthode 2 :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2$$
$$* = (u_1+v_1)^2 + (u_2+v_2)^2 - (u_1^2+u_2^2) - (v_1^2+v_2)^2$$
$$= u_1^2 + 2u_1v_1 + v_1^2 + u_2^2 + 2u_2v_2 + v_2^2 - u_1^2 - u_2^2 - v_1^2 - v_2^2$$
$$= 2u_1v_1 + 2u_2v_2 = 2(u_1v_1 + u_2v_2)$$
$$\Rightarrow \quad \vec{u}\cdot\vec{v}_1 = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$$

Problème 2 (3 points)

Soit $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$. On a aussi $\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Calculer $\vec{a} \times \vec{b}$.

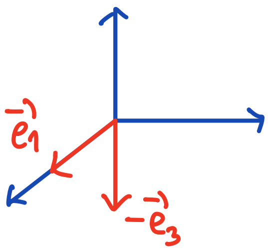
b) Calculer $\vec{c} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)$.

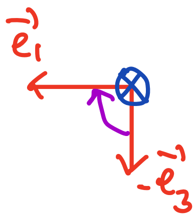
c) Exprimer en fonction des vecteurs $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ et $\vec{e_3}$ le vecteur $(-\vec{e_3}) \times \vec{e_1}$.

a) $\vec{a} \times \vec{b} = \left| \begin{matrix} \vec{e_1} & 1 & -1 \\ \vec{e_2} & 1 & -1 \\ \vec{e_3} & 0 & 1 \end{matrix} \right| \begin{matrix} \vec{e_1} & 1 \\ \vec{e_2} & 1 \\ \vec{e_3} & 0 \end{matrix} = \begin{pmatrix} 1-0 \\ 0-1 \\ -1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $\vec{c} \perp \vec{b} \times \vec{c} \Rightarrow \vec{c} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$

c)





$(-\vec{e_3}) \times \vec{e_1} = -\vec{e_2}$

Problème 3 (4 points)

Soit les points $A(4\,;\,-1\,;\,3)$, $B(2\,;\,5\,;\,-1)$ et $C(-1\,;\,-2\,;\,0)$.

a) Calculer la valeur de l'angle φ entre les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

b) Déterminer le vecteur $\vec{p}$ projection du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sur $\overrightarrow{AC}$.

a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$

$$\cos(\varphi) = \frac{16}{\sqrt{56}\cdot\sqrt{35}} \Rightarrow \varphi \cong 68,81°$$

b) $\vec{p} = \frac{16}{35}\begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$

Problème 4 (9 points)
On considère une pyramide $SABC$ avec $A(-2;4;1)$, $B(1;6;-5)$, $C(0;10;4)$, et $S(2;7;4)$.

a) Déterminer le volume de la pyramide $SABC$.

b) Déterminer la longueur de la hauteur de la pyramide $SABC$ issue du sommet S.

c) Calculer l'angle aigu que forme l'arête AS avec la face ABC.

a) $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$, $\vec{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{AS} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

$V = \frac{1}{6} \left| [\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AS}] \right|$

$[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AS}] = \left| \begin{matrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 3 \\ -6 & 3 & 3 \end{matrix} \right| \begin{matrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \\ -6 & 3 \end{matrix}$

$= 54 - 36 + 24 + 144 - 27 - 12$

$= 147$

$\Rightarrow$ Volume $\frac{147}{6} = \frac{49}{2} = 24.5$ $[u^3]$

b) $\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{pmatrix} 42 \\ -21 \\ 14 \end{pmatrix}$, aire de la base : $\frac{1}{2} \|\vec{n}\| = \frac{49}{2}$

$\Rightarrow 24.5 = \frac{1}{3} \frac{49}{2} \cdot h \Rightarrow h = 6 \cdot \frac{49}{2} \cdot \frac{1}{49} = 3$

c) Angle θ entre $\vec{n}$ et $\vec{AS}$:

$\cos\theta = \frac{\vec{n} \cdot \vec{AS}}{\|\vec{n}\| \cdot \|\vec{AS}\|} = \frac{147}{49 \cdot \sqrt{34}} = \frac{3}{\sqrt{34}} \Rightarrow \theta \cong 59{,}04°$

$\Rightarrow$ l'angle est de $30{,}96°$