Géométrie 2 – TE 842B

Problème	1	2	3	4	Total
Points	4	3	4	9	20
Points obtenus					

Problème 1 (4 points)

Démontrer que pour tout couple $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ de vecteurs du plan, la relation suivante est vérifiée.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}\left(\underbrace{\|\vec{a} + \vec{b}\|^2 - \|\vec{a}\|^2 - \|\vec{b}\|^2}_{*}\right)$$

Méthode 1 :

$$\|\vec{a} + b\|^2 = (\vec{a} + \vec{b})\cdot(\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a}\cdot\vec{a} + 2\cdot\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{b}$$

$$= \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 + 2\cdot\vec{a}\cdot\vec{b}$$

$$\Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{a} + \vec{b}\|^2 - \|\vec{a}\|^2 - \|\vec{b}\|^2\right)$$

Méthode 2 :

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

$$* = (a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2 - (a_1^2 + a_2^2) - (b_1^2 + b_2^2)$$

$$= a_1^2 + b_1^2 + 2a_1 b_1 + a_2^2 + b_2^2 + 2a_2 b_2 - a_1^2 - a_2^2 - b_1^2 - b_2^2$$

$$= 2a_1 b_1 + 2a_2 b_2 = 2(a_1 b_1 + a_2 b_2)$$

$$\Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{a} + \vec{b}\|^2 - \|\vec{a}\|^2 - \|\vec{b}\|^2\right)$$

Problème 2 (3 points)

Soit $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{c} = \begin{pmatrix}2\\3\\-4\end{pmatrix}$. On a aussi $\vec{e_1} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{e_2} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{e_3} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

a) Calculer $\vec{a} \times \vec{b}$.

b) Calculer $\vec{c} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)$.

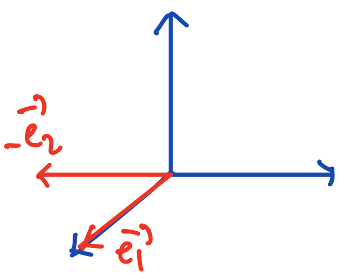
c) Exprimer en fonction des vecteurs $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ et $\vec{e_3}$ le vecteur $(-\vec{e_2}) \times \vec{e_1}$.

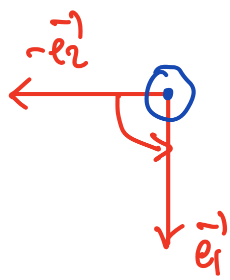
a) $\vec{a} \times \vec{b} = \left| \begin{matrix} \vec{e_1} & 1 & -1 \\ \vec{e_2} & 0 & 1 \\ \vec{e_3} & 1 & -1 \end{matrix} \right| \begin{matrix} \vec{e_1} & 1 \\ \vec{e_2} & 0 \\ \vec{e_3} & 1 \end{matrix} = \begin{pmatrix} 0-1 \\ -1+1 \\ 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\vec{c} \perp \vec{b} \times \vec{c} \Rightarrow \vec{c} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$

$\vec{b} \times \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ -5 \end{pmatrix}$

c)





$(-\vec{e_2}) \times \vec{e_1} = \vec{e_3}$

Problème 3 (4 points)

Soit les points $R(4\,;\,-1\,;\,3)$, $S(2\,;\,5\,;\,-1)$ et $T(-1\,;\,-2\,;\,0)$.

a) Calculer la valeur de l'angle φ entre les vecteurs $\overrightarrow{RS}$ et $\overrightarrow{RT}$.

b) Déterminer le vecteur $\overrightarrow{q}$ projection du vecteur $\overrightarrow{RS}$ sur $\overrightarrow{RT}$.

a) $\overrightarrow{RS} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{RT} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$

$\cos(\varphi) = \dfrac{16}{\sqrt{56} \cdot \sqrt{35}} \Rightarrow \varphi \cong 68{,}81°$

b) $\overrightarrow{p} = \dfrac{16}{35} \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$

Problème 4 (9 points)

On considère une pyramide $SABC$ avec $A(-1;6;5)$, $B(-4;4;11)$, $C(-3;0;2)$, et $S(1;3;5)$.

a) Déterminer le volume de la pyramide $SABC$.

b) Déterminer la longueur de la hauteur de la pyramide $SABC$ issue du sommet S.

c) Calculer l'angle aigu que forme l'arête AS avec la face ABC.

a) $\vec{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\vec{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{AS} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$

$V = \frac{1}{6} \left| [\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AS}] \right|$

$$[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AS}] = \left|\begin{array}{ccc|cc} -3 & -2 & 2 & -3 & -2 \\ -2 & -6 & -3 & -2 & -6 \\ 6 & -3 & 0 & 6 & -3 \end{array}\right|$$

$= 0 + 36 + 12 + 72 + 27$

$= 147$

$\Rightarrow$ Volume $\frac{147}{6} = \frac{49}{2} = 24{,}5 \; [u^3]$

b) $\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{pmatrix} 42 \\ -21 \\ 14 \end{pmatrix}$, aire de la base : $\frac{1}{2} \|\vec{n}\| = \frac{49}{2}$

$\Rightarrow 24{,}5 = \frac{1}{3} \frac{49}{2} \cdot h \Rightarrow h = 6 \cdot \frac{49}{2} \cdot \frac{1}{49} = 3$

c) Angle θ entre $\vec{n}$ et $\vec{AS}$:

$\cos\theta = \frac{\vec{n} \cdot \vec{AS}}{\|\vec{n}\| \cdot \|\vec{AS}\|} = \frac{147}{49 \cdot \sqrt{13}} = \frac{3}{\sqrt{13}} \Rightarrow \theta \cong 33{,}69°$

$\Rightarrow$ l'angle est de $56{,}31°$