

Algèbre 2 – TE 849A

Problème	1	2	3	4	5	6	Total
Points	6	5	5	5	5	5	31
Points obtenus							

Problème 1 (6 points)

Rendre les fractions rationnelles irréductibles.

a) $\frac{x^2 + 7x + 12}{x^3 + 4x^2 - 9x - 36}$

b) $\frac{(x^4 + x^2 - 2)(x + 1)}{(x^2 + 3x + 2)(x^2 - 1)}$

$$a) \frac{(x+3)(x+4)}{x^2(x+4)-9(x+4)} = \frac{\cancel{(x+3)}\cancel{(x+4)}}{\cancel{(x+3)}(x-3)\cancel{(x+4)}} = \frac{1}{x-3}$$

$$b) \frac{(x^2+2)\cancel{(x^2-1)}\cancel{(x+1)}}{(x+2)\cancel{(x+1)}\cancel{(x^2-1)}} = \frac{x^2+2}{x+2}$$

Problème 2 (5 points)

Déterminer l'ensemble de définition de l'équation rationnelle, noté ED . Puis la résoudre dans $\mathbb{R}$.

$$\frac{4x+5}{2x^2-9x+7} - \frac{3x}{x-1} = \frac{5}{2x-7} - \frac{3(x-2)}{x-1}$$

$$DC: 2x^2 - 9x + 7 = (2x-7)(x-1)$$

$$ED = \mathbb{R} - \left\{ 1; \frac{7}{2} \right\}$$

$$4x+5 - 3x(2x-7) = 5(x-1) - 3(x-2)(2x-7)$$

$$4x+5 - \underline{6x^2} + 21x = 5x-5 - \underline{6x^2} + 33x - 42$$

$$-13x = -52$$

$$x = 4$$

$$\underline{S = \{ 4 \}}$$

Problème 3 (5 points)

Résoudre l'équation suivante.

$$|2x - 6| - |x + 1| = |x - 11|$$

x	-1	3	11	
$2x - 6$	$-2x + 6$	$-2x + 6$	$2x - 6$	$2x - 6$
$x + 1$	$-x - 1$	$x + 1$	$x + 1$	$x + 1$
$x - 11$	$-x + 11$	$-x + 11$	$-x + 11$	$x - 11$

1°) $x \leq -1$: $-2x + 6 - (-x - 1) = -x + 11$

$$-x + 7 = -x + 11$$

aucune solution

2°) $-1 < x < 3$: $-2x + 6 - (x + 1) = -x + 11$

$$-3x + 5 = -x + 11$$

$$2x = -6$$

$$x = -3$$

ne convient pas !

3°) $3 \leq x < 11$: $2x - 6 - (x + 1) = -x + 11$

$$x - 7 = -x + 11$$

$$2x = 18$$

$$x = 9$$

convient

4°) $x \geq 11$: $2x - 6 - (x + 1) = x - 11$

$$x - 7 = x - 11$$

aucune solution

$$S = \{9\}$$

Problème 4 (5 points)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation ci-dessous.

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{19-x} = \sqrt{8}$$

$$x+1 + \sqrt{19-x} = 8$$

$$\sqrt{19-x} = 7-x$$

$$19-x = x^2 - 14x + 49$$

$$x^2 - 13x + 30 = 0$$

$$(x-3)(x-10) = 0$$

$$10) \quad \underline{x=3} : \quad \sqrt{3+1} + \sqrt{19-3} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} \quad \checkmark$$

$$\underline{x=10} : \quad \sqrt{11+3} \neq \sqrt{8} \quad \text{ne convient pas}$$

$$\underline{S = \{3\}}$$

Problème 5 (5 points)

Résoudre le système suivant par la méthode du pivot. Ecrire l'ensemble des solutions du système.

$$\begin{cases} 2x + y - 2z = 10 \\ x + y + 4z = -9 \\ 7x + 5y + z = 14 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 10 \\ 1 & 1 & 4 & -9 \\ 7 & 5 & 1 & 14 \end{array} \right) \quad L_1 \leftrightarrow L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & -9 \\ 2 & 1 & -2 & 10 \\ 7 & 5 & 1 & 14 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 7L_1 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 4 & -9 \\ 0 & -1 & -10 & 28 \\ 0 & -2 & -27 & 77 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_2 \uparrow \\ -L_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 4 & -9 \\ 0 & 1 & 10 & -28 \\ 0 & -2 & -27 & 77 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & -6 & 19 \\ 0 & \boxed{1} & 10 & -28 \\ 0 & 0 & -7 & 21 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_3 \uparrow \\ -\frac{1}{7}L_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & -6 & 19 \\ 0 & \boxed{1} & 10 & -28 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + 6L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 10L_3 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = -3 \end{cases}$$

$$\mathcal{S} = \{ (1, 2, -3) \}$$

Problème 6 (5 points)

Résoudre le système suivant par la méthode du pivot. Ecrire l'ensemble des solutions du système.

$$\begin{cases} x - 3y + 7z = -4 \\ x + 2y - 3z = 6 \\ 7x + 4y - z = 22 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 7 & -4 \\ 1 & 2 & -3 & 6 \\ 7 & 4 & -1 & 22 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 7L_1 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 7 & -4 \\ 0 & 5 & -10 & 10 \\ 0 & 25 & -50 & 50 \end{array} \right)$$

$L_2 \leftarrow \frac{1}{5}L_2$
 $L_3 \leftarrow L_3 - 5L_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 7 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad L_1 \leftarrow L_1 + 3L_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

1 degré de liberté

$$\Rightarrow \begin{cases} x + z = 2 \\ y - 2z = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} x = -t + 2 \\ y = 2t + 2 \\ z = t \end{array}$$

$$S = \left\{ (-t+2; 2t+2; t) \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

Algèbre 2 – TE 849B

Problème	1	2	3	4	5	6	Total
Points	6	5	5	5	5	5	31
Points obtenus							

Problème 1 (6 points)

Rendre les fractions rationnelles irréductibles.

$$a) \frac{a^2 - 7a + 12}{a^3 + 3a^2 - 16a - 48}$$

$$b) \frac{(x^2 + 3x + 2)(x^2 - 1)}{(x^4 + x^2 - 2)(x + 1)}$$

$$a) \frac{(a-4)(a-3)}{a^2(a+3)-16(a+3)} = \frac{\cancel{(a-4)}(a-3)}{\cancel{(a-4)}(a+4)(a+3)} = \frac{a-3}{(a+4)(a+3)}$$

$$b) \frac{(x+2)\cancel{(x+1)}\cancel{(x^2-1)}}{(x^2+2)\cancel{(x^2-1)}\cancel{(x+1)}} = \frac{x+2}{x^2+2}$$

Problème 2 (5 points)

Déterminer l'ensemble de définition de l'équation rationnelle, noté ED . Puis la résoudre dans $\mathbb{R}$.

$$\frac{5}{2x-7} - \frac{3(x-2)}{x-1} = \frac{4x+5}{2x^2-9x+7} - \frac{3x}{x-1}$$

$$DC: 2x^2 - 9x + 7 = (2x-7)(x-1)$$

$$ED = \mathbb{R} - \left\{ 1; \frac{7}{2} \right\}$$

$$5(x-1) - 3(x-2)(2x-7) = 4x+5 - 3x(2x-7)$$

$$5x-5 - \underline{6x^2} + 33x - 42 = 4x+5 - \underline{6x^2} + 21x$$

$$-13x = -52$$

$$x = 4$$

$$\underline{S = \{ 4 \}}$$

Problème 3 (5 points)

Résoudre l'équation suivante.

$$|2x - 6| - |x + 2| = |x - 12|$$

X	-2	3	12	
$ 2x - 6 $	$-2x+6$	$-2x+6$ ①	$2x-6$	$2x-6$ 3
$ x + 2 $	$-x-2$ ①	$x+2$	$x+2$	$x+2$ -2
$ x-12 $	$-x+12$	$-x+12$	$-x+12$ ①	$x-12$ 12

1°) $x < -2$: $-2x+6 + x+2 = -x+12$
 $8 = 12$ aucune solution

2°) $-2 \leq x < 3$: $-2x+6 - x-2 = -x+12$
 $-2x = 8$
 $x = -4$ ne convient pas

3°) $3 \leq x < 12$: $2x-6 - x-2 = -x+12$
 $2x = 20$
 $x = 10$ convient

4°) $x \geq 12$: $2x-6 - x-2 = x-12$
 $-8 = -12$ aucune solution

$$S = \{10\}$$

Problème 4 (5 points)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation ci-dessous.

$$\sqrt{x+2} + \sqrt{18-x} = \sqrt{8}$$

$$x+2 + \sqrt{18-x} = 8$$

$$\sqrt{18-x} = 6-x$$

$$18-x = x^2 - 12x + 36$$

$$x^2 - 11x + 18 = 0$$

$$(x-2)(x-9) = 0$$

$()^2$ ⚠

$()^2$ ⚠

10) $x=2$: $\sqrt{2+2} + \sqrt{18-2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$ ✓

$x=9$: $\sqrt{11+3} \neq \sqrt{8}$ ne convient pas

$S = \{2\}$

Problème 5 (5 points)

Résoudre le système suivant par la méthode du pivot. Ecrire l'ensemble des solutions du système.

$$\begin{cases} 2x + y - 2z = 10 \\ x + y + 4z = -9 \\ 7x + 5y + z = 14 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_2 \end{array} \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & | & 10 \\ 1 & 1 & 4 & | & -9 \\ 7 & 5 & 1 & | & 14 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftrightarrow L_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & | & -9 \\ 2 & 1 & -2 & | & 10 \\ 7 & 5 & 1 & | & 14 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 7L_1 \end{array} \quad \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 4 & | & -9 \\ 0 & -1 & -10 & | & 28 \\ 0 & -2 & -27 & | & 77 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \uparrow \\ -L_2 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 4 & | & -9 \\ 0 & 1 & 10 & | & -28 \\ 0 & -2 & -27 & | & 77 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \end{array} \quad \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & -6 & | & 19 \\ 0 & \boxed{1} & 10 & | & -28 \\ 0 & 0 & -7 & | & 21 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_3 \uparrow \\ -\frac{1}{7}L_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & -6 & | & 19 \\ 0 & \boxed{1} & 10 & | & -28 \\ 0 & 0 & 1 & | & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + 6L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 10L_3 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & -3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = -3 \end{cases}$$

$$\underline{S = \{(1, 2, -3)\}}$$

Problème 6 (5 points)

Résoudre le système suivant par la méthode du pivot. Ecrire l'ensemble des solutions du système.

$$\begin{cases} x - 3y + 7z = -4 \\ x + 2y - 3z = 6 \\ 7x + 4y - z = 22 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 7 & -4 \\ 1 & 2 & -3 & 6 \\ 7 & 4 & -1 & 22 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 7L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 7 & -4 \\ 0 & 5 & -10 & 10 \\ 0 & 25 & -50 & 50 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_2 \leftarrow \frac{1}{5} L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 5L_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 7 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + 3L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{array} \right) \text{1 degré de liberté'}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + z = 2 \\ y - 2z = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} x = -t + 2 \\ y = 2t + 2 \\ z = t \end{array}$$

$$S = \{ (-t+2; 2t+2; t) \mid t \in \mathbb{R} \}$$