01.10.25
et 02.10.25

1.4.1

e) On donne $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$. Calculer le nombre m tel que

$$\|\vec{u} + m\vec{v}\| = \sqrt{82}$$

$$\left\| \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\vec{u} + m\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + m\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2m \\ 4m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2m \\ 3+4m \end{pmatrix}$$

$$\|\vec{u} + m\vec{v}\| = \sqrt{82} \Rightarrow \sqrt{(2-2m)^2 + (3+4m)^2} = \sqrt{82}$$

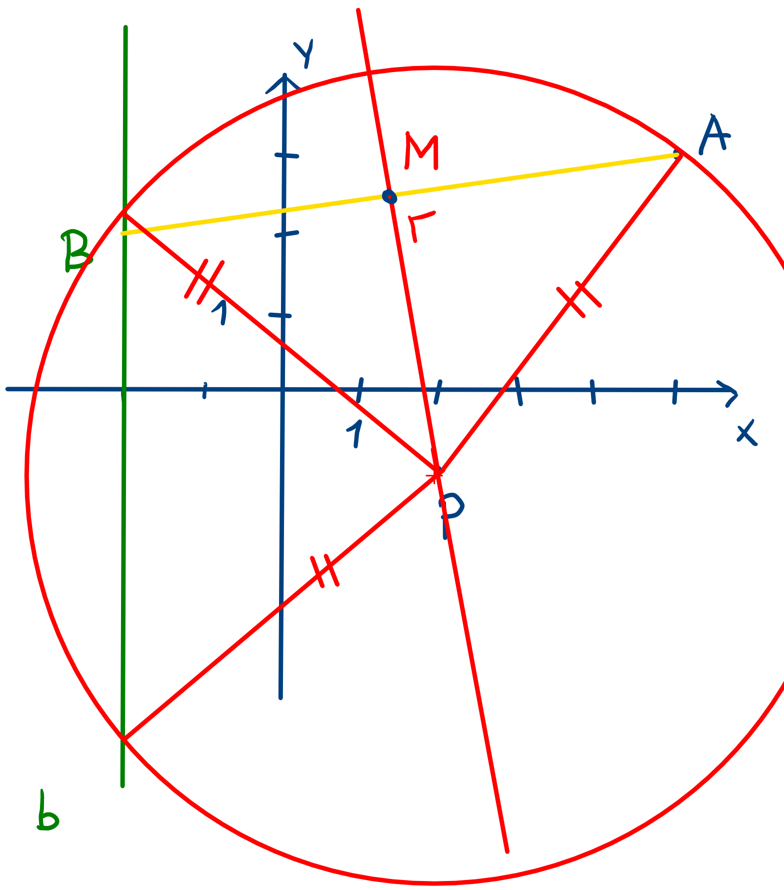
$$(2-2m)^2 + (3+4m)^2 = 82$$

$$4 - 8m + 4m^2 + 9 + 24m + 16m^2 - 82 = 0$$

$$20m^2 + 16m - 69 = 0$$

$$m = \frac{3}{2} \quad \text{ou} \quad m = \frac{-23}{10}$$

1.4.5 Déterminer k pour que $P(2;-1)$ soit situé sur la médiatrice du segment AB, si $A(5;3)$ et $B(-2;k)$.



$$\vec{PA} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad ; \quad \|\vec{PA}\| = 5$$

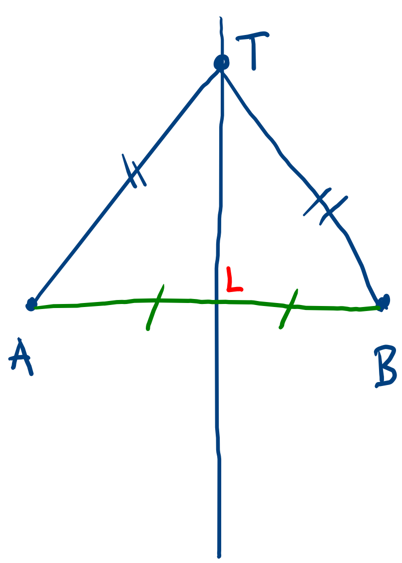
$$\vec{PB} = \begin{pmatrix} -2 \\ k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ k+1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \|\vec{PB}\| = \sqrt{16 + (k+1)^2}$$

$$\sqrt{16 + (k+1)^2} = 5$$

$$\Rightarrow \quad 16 + (k+1)^2 = 25$$

$$(k+1)^2 = 9$$

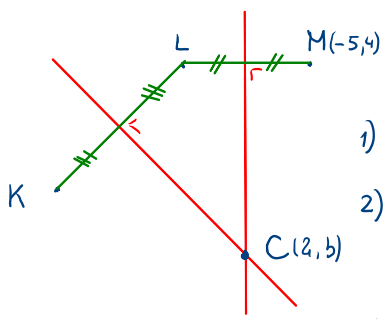
$$k+1 = \begin{cases} 3 & \Rightarrow \underline{k = 2} \\ -3 & \Rightarrow \underline{k = -4} \end{cases}$$



1.4.7 Déterminer le centre du cercle passant par les points $K(-3;6)$, $L(9;-10)$ et $M(-5;4)$.

Ces trois points ne sont pas alignés.

Soit $C(a,b)$ le centre du cercle cherché.



On doit avoir :

1) $\|\vec{MC}\| = \|\vec{LC}\| \Rightarrow \|\vec{MC}\|^2 = \|\vec{LC}\|^2$

2) $\|\vec{KC}\| = \|\vec{LC}\| \Rightarrow \|\vec{KC}\|^2 = \|\vec{LC}\|^2$

$$\vec{MC} = \vec{OC} - \vec{OM} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+5 \\ b-4 \end{pmatrix} \quad ; \quad \|\vec{MC}\|^2 = (a+5)^2 + (b-4)^2$$

$$\vec{LC} = \vec{OC} - \vec{OL} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 \\ -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-9 \\ b+10 \end{pmatrix} \quad ; \quad \|\vec{LC}\|^2 = (a-9)^2 + (b+10)^2$$

$$\vec{KC} = \vec{OC} - \vec{OK} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+3 \\ b-6 \end{pmatrix} \quad ; \quad \|\vec{KC}\|^2 = (a+3)^2 + (b-6)^2$$

$$\begin{cases} (a+5)^2 + (b-4)^2 = (a-9)^2 + (b+10)^2 \\ (a+3)^2 + (b-6)^2 = (a-9)^2 + (b+10)^2 \end{cases}$$

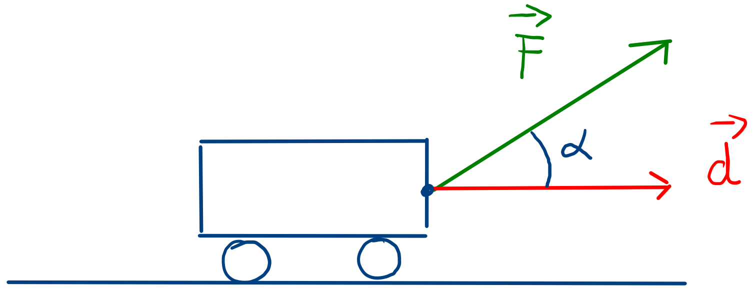
$$\boxed{\begin{aligned} (A+B)^2 &= A^2 + 2AB + B^2 \\ (A-B)^2 &= A^2 - 2AB + B^2 \\ (A-B)(A+B) &= A^2 - B^2 \end{aligned}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 10a + 25 + b^2 - 8b + 16 = a^2 - 18a + 81 + b^2 + 20b + 100 \\ a^2 + 6a + 9 + b^2 - 12b + 36 = a^2 - 18a + 81 + b^2 + 20b + 100 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 28a - 28b = 140 & \mid \div 28 \\ 24a - 32b = 136 & \mid \div 8 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{array}{l|c|c} & b & a \\ \begin{cases} a - b = 5 \\ 3a - 4b = 17 \end{cases} & \begin{array}{c} \cdot 4 \\ \cdot(-1) \end{array} & \begin{array}{c} \cdot 3 \\ \cdot(-1) \end{array} \end{array}$$

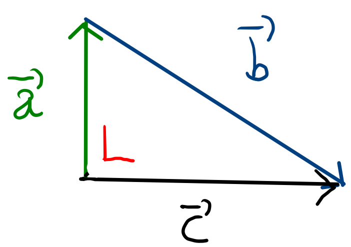
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad C(3;-2) \text{ est le centre du cercle cherché.}$$

Produit scalaire



$$W = \|\vec{F}\| \cdot \|\vec{d}\| \cdot \cos(\alpha)$$

Critère d'orthogonalité pour les vecteurs



$$\vec{a} \perp \vec{c} \iff \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{c}\|^2 = \|\vec{b}\|^2$$

$$\iff \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{c}\|^2 = \|\vec{a} + \vec{c}\|^2 \quad \text{(Pythagore)}$$

Posons $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$. On a $\vec{a} + \vec{c} = \begin{pmatrix} a_1 + c_1 \\ a_2 + c_2 \end{pmatrix}$.

$$\vec{a} \perp \vec{c} \iff a_1^2 + a_2^2 + c_1^2 + c_2^2 = (a_1 + c_1)^2 + (a_2 + c_2)^2$$

$$\iff a_1^2 + a_2^2 + c_1^2 + c_2^2 = a_1^2 + 2a_1c_1 + c_1^2 + a_2^2 + 2a_2c_2 + c_2^2$$

$$\iff 0 = 2a_1c_1 + 2a_2c_2$$

$$\iff a_1c_1 + a_2c_2 = 0$$

$$\boxed{\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \perp \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \iff a_1c_1 + a_2c_2 = 0}$$

1.4.9 Indiquer dans chacun des cas si les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont perpendiculaires :

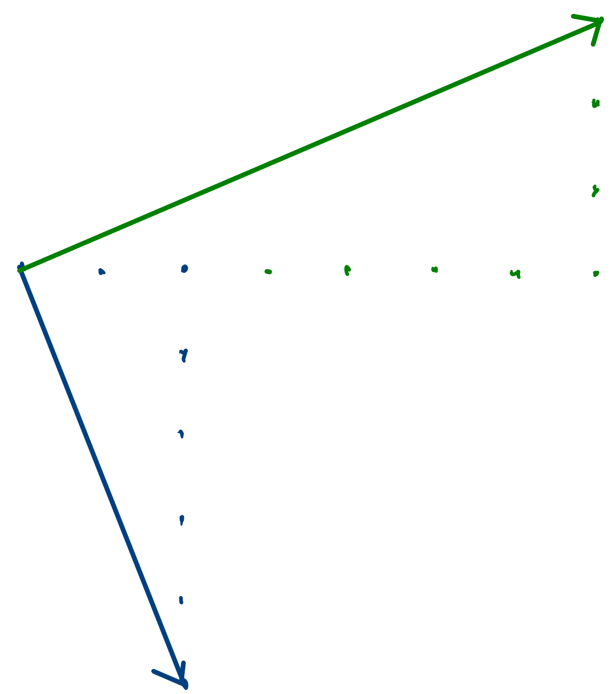
a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 53 \\ -41 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 41 \\ 53 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 16 \end{pmatrix}$

d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3/4 \end{pmatrix}$

a) $2 \cdot 7 + (-5) \cdot 3 = 14 - 15 = -1 \neq 0 \Rightarrow \vec{a}$ et $\vec{b}$ non perpendiculaires



Le produit scalaire de deux vecteurs

Soit $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$.

On note $\vec{a} \cdot \vec{b}$ le nombre $a_1 b_1 + a_2 b_2$.

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2}$$

$\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$