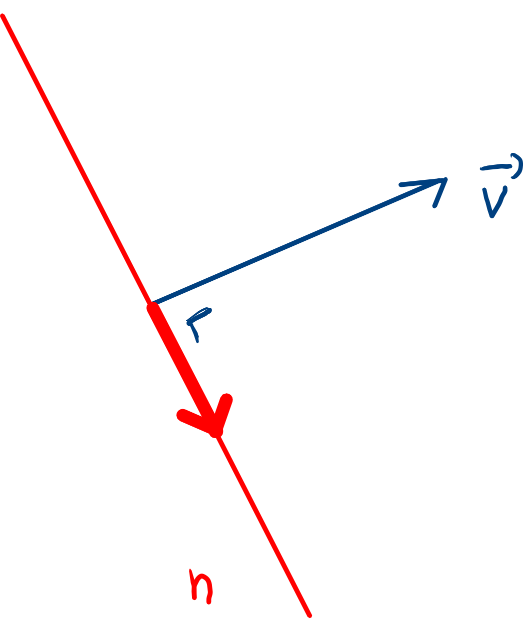
03.10.25

1.4.10 Indiquer dans chacun des cas si les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont perpendiculaires :

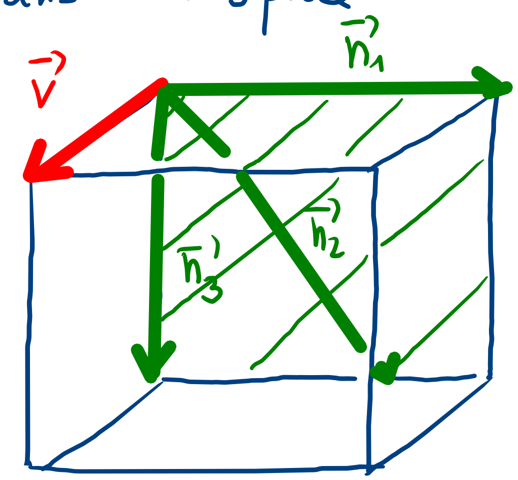
a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 9 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 - 3 + 2 = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$

Dans le plan :



Dans l'espace



$\vec{n}_k \perp \vec{v}$, $k = 1, 2, 3$

1.4.11 Résoudre les problèmes suivants :

a) Calculer m, sachant que les vecteurs $\underbrace{\begin{pmatrix} m \\ -2 \end{pmatrix}}_{\vec{a}}$ et $\underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}}_{\vec{b}}$ sont perpendiculaires.

$$\vec{a} \perp \vec{b} \iff 3m - 10 = 0 \iff m = \frac{10}{3}$$

b) Soit $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$. Déterminer le nombre k pour lequel les vecteurs $\vec{a} + k\vec{b}$ et $\vec{c}$ sont perpendiculaires.

$$\vec{a} + k\vec{b} = \begin{pmatrix} 1+2k \\ 2+k \\ -3+4k \end{pmatrix} ; \quad \vec{a} + k\vec{b} \perp \vec{c} \iff 6(1+2k) - 5(2+k) = 0$$

$$\iff 6 + 12k - 10 - 5k = 0$$

$$\iff 7k = 4 \iff k = \frac{4}{7}$$

c) On donne $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 11 \end{pmatrix}$. Déterminer un vecteur $\vec{w}$ et un nombre k, de telle sorte que $\vec{u}$ et $\vec{w}$ soient perpendiculaires et que $\vec{v} = k\vec{u} + \vec{w}$.

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

1) $\vec{u} \perp \vec{w} \Rightarrow a + 3b = 0 \iff a = -3b \Rightarrow \vec{w} = \begin{pmatrix} -3b \\ b \end{pmatrix}$

2) $\vec{v} = k\vec{u} + \vec{w} \Rightarrow \begin{pmatrix} -3 \\ 11 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3b \\ b \end{pmatrix}$

$$\iff \begin{cases} -3 = k - 3b \\ 11 = 3k + b \end{cases} \quad \begin{array}{c|c} k & b \\ \cdot(-3) & \cdot 1 \\ 1 & \cdot 3 \end{array}$$

$$\iff \begin{cases} 20 = 10b \\ 30 = 10k \end{cases} \iff \begin{cases} b = 2 \\ k = 3 \end{cases}$$

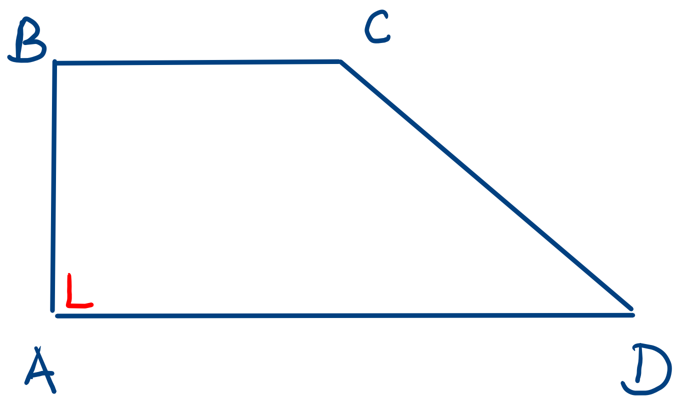
Ainsi $\vec{w} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $k = 3$.

d) Déterminer a et b pour que le vecteur $\underbrace{\begin{pmatrix} 7 \\ a \\ b \end{pmatrix}}_{\vec{u}}$ soit à la fois orthogonal à $\underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}}_{\vec{v}}$ et à $\underbrace{\begin{pmatrix} -5 \\ 20 \\ 9 \end{pmatrix}}_{\vec{w}}$.

$$\begin{matrix} \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \\ \vec{u} \cdot \vec{w} = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 28 + 3a + 8b = 0 \\ -35 + 20a + 9b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a + 8b = -28 \\ 20a + 9b = 35 \end{cases}$$

On résout ce système...

1.4.12 Montrer que le quadrilatère $ABCD$ est un trapèze rectangle en A, puis calculer son aire, si $A(7;5)$, $B(8;7)$, $C(12;5)$ et $D(13;2)$.



$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

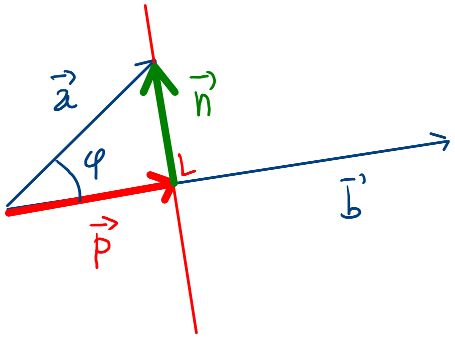
$$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{BC}$$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = 6 - 6 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB} = 4 - 4 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{AB} \end{array}\right\} \text{trapèze rectangle}$$

Aire du trapèze : $\dfrac{\|\overrightarrow{AD}\| + \|\overrightarrow{BC}\|}{2} \cdot \|\overrightarrow{AB}\| = \dfrac{\sqrt{45} + \sqrt{20}}{2} \cdot \sqrt{5} = \dfrac{3\sqrt{5} + 2\sqrt{5}}{2} \sqrt{5}$

$$= \frac{5\sqrt{5}}{2} \cdot \sqrt{5} = \frac{25}{2} = 12{,}5 \ [u^2]$$

Projection d'un vecteur sur un autre



On donne $\vec{a}$ et $\vec{b}$ deux vecteurs différents de $\vec{0}$

Déterminons la projection orthogonale de $\vec{a}$ sur $\vec{b}$. Soit $\vec{p}$ ce vecteur.

Soit $\vec{n}$ tel que $\vec{n} = \vec{a} - \vec{p}$.

Nous avons $\begin{cases} \vec{a} = \vec{p} + \vec{n} \\ \vec{p} = \lambda \vec{b} \end{cases}$, avec $\lambda \neq 0$

Calculons le produit scalaire $\vec{a} \cdot \vec{b}$:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (\vec{p} + \vec{n}) \cdot \vec{b} = (\lambda \vec{b} + \vec{n}) \cdot \vec{b} = (\lambda \vec{b}) \cdot \vec{b} + \underbrace{\vec{n} \cdot \vec{b}}_{\vec{n} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{b} = 0}$$

$$= \lambda \cdot (\vec{b} \cdot \vec{b}) + 0 = \lambda \|\vec{b}\|^2$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{b}\|^2} \qquad \Rightarrow \boxed{\vec{p} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{b}\|^2} \vec{b}}$$

Calculons la norme de $\vec{p}$,

$$\vec{p} = \left\| \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{b}\|^2} \cdot \vec{b} \right\| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{\|\vec{b}\|^{\cancel{2}}} \cancel{\|\vec{b}\|} = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{\|\vec{b}\|}$$

où $|\vec{a} \cdot \vec{b}|$ est la valeur absolue de $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Mercredi $\Rightarrow$ 1.4.16