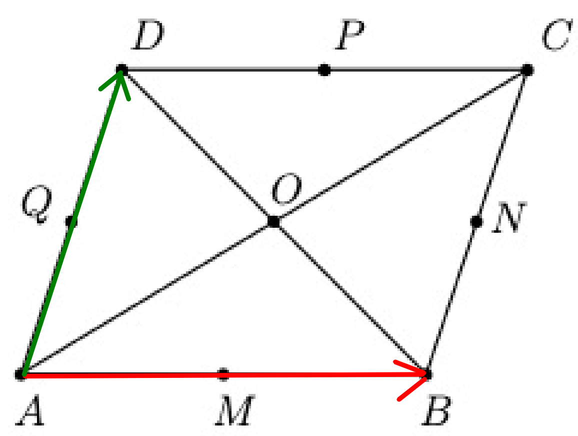
05.09.25

1.2.5 Les points M, N, P et Q sont les milieux des côtés du parallélogramme $ABCD$.



a) Donner, dans la base $\mathfrak{B}_1 = \left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}\right)$, les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AQ}$, $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{QP}$ et $\overrightarrow{CM}$

$$\overrightarrow{AB} = 1 \cdot \overrightarrow{AB} + 0 \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

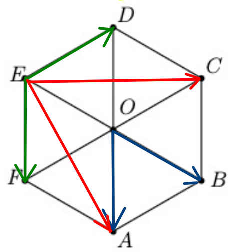
$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB} + 0 \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AN} = 1 \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AD}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

1.2.6 Soit $ABCDEF$ un hexagone régulier de centre O. Donner les composantes des vecteurs

$$\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{CB},\ \overrightarrow{FA},\ \overrightarrow{EA},\ \overrightarrow{EC},\ \overrightarrow{DB},\ \overrightarrow{EB},\ \overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{OC},\ \overrightarrow{OD},\ \overrightarrow{OE}$$



a) dans la base $\mathfrak{B}_1 = \left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)$

b) dans la base $\mathfrak{B}_2 = \left(\overrightarrow{EF};\overrightarrow{ED}\right)$

c) dans la base $\mathfrak{B}_3 = \left(\overrightarrow{EA};\overrightarrow{EC}\right)$

d) dans la base $\mathfrak{B}_4 = \left(\overrightarrow{OE};\overrightarrow{AB}\right)$

a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$;

c) Pour résoudre ce problème, nous allons exprimer les vecteurs de la base $\mathcal{B}_1$ par rapport à la base $\mathcal{B}_3$. Puis nous ferons un changement de base.

$$\begin{array}{l|c|c}
 & \overrightarrow{OA} & \overrightarrow{OB} \\
\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \\ \overrightarrow{EC} = -\overrightarrow{OA} + 2\,\overrightarrow{OB} \end{array}\right. & \begin{array}{c} \cdot 1 \\ \cdot 1 \end{array} & \begin{array}{c} \cdot 2 \\ \cdot(-1) \end{array}
\end{array}
\quad
\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EC} = 3\,\overrightarrow{OB} \\ 2\,\overrightarrow{EA} - \overrightarrow{EC} = 3\,\overrightarrow{OA} \end{array}\right. \left| \begin{array}{c} \cdot \frac{1}{3} \\ \cdot \frac{1}{3} \end{array}\right.$$

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{OA} = \frac{2}{3}\,\overrightarrow{EA} - \frac{1}{3}\,\overrightarrow{EC} \\ \overrightarrow{OB} = \frac{1}{3}\,\overrightarrow{EA} + \frac{1}{3}\,\overrightarrow{EC} \end{array}\right.}$$

$$\overrightarrow{DB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_3}$$

$$\overrightarrow{DB} = 1\cdot\overrightarrow{OA} + 1\cdot\overrightarrow{OB} = 1\cdot\left(\frac{2}{3}\,\overrightarrow{EA} - \frac{1}{3}\,\overrightarrow{EC}\right) + 1\left(\frac{1}{3}\,\overrightarrow{EA} + \frac{1}{3}\,\overrightarrow{EC}\right)$$

$$= 1\cdot\overrightarrow{EA} + 0\cdot\overrightarrow{EC}$$

$$\vec{OC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}_{B_1}$$

$$\begin{cases} \vec{OA} = \frac{2}{3}\vec{EA} - \frac{1}{3}\vec{EC} \\ \vec{OB} = \frac{1}{3}\vec{EA} + \frac{1}{3}\vec{EC} \end{cases}$$

$$\vec{OC} = -1 \cdot \vec{OA} + 1\,\vec{OB}$$

$$= -1\left(\frac{2}{3}\vec{EA} - \frac{1}{3}\vec{EC}\right) + \left(\frac{1}{3}\vec{EA} + \frac{1}{3}\vec{EC}\right)$$

$$= -\frac{2}{3}\vec{EA} + \frac{1}{3}\vec{EC} + \frac{1}{3}\vec{EA} + \frac{1}{3}\vec{EC}$$

$$= -\frac{1}{3}\vec{EA} + \frac{2}{3}\vec{EC} \quad \Rightarrow \quad \vec{OC} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}_{B_3}$$

Calculs avec les composantes de vecteurs

Soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Dans cette base, on a deux vecteurs $\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$.

1. $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$

2. $K \cdot \vec{a} = K \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K a_1 \\ K a_2 \end{pmatrix}$ où $K \in \mathbb{R}$ (scalaire)