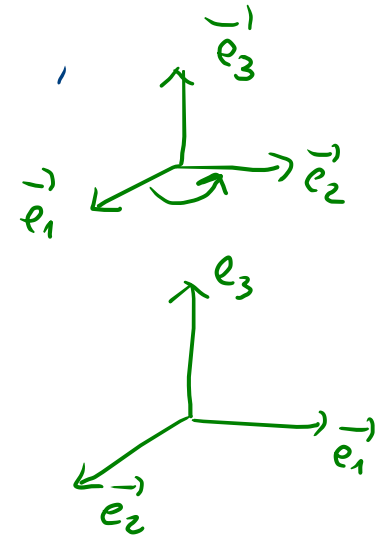


Propriétés du produit vectoriel

① Identité de Lagrange : $\|\vec{u} \times \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 \cdot \|\vec{v}\|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2$

② Si la base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est telle que $\vec{e}_3 = \vec{e}_1 \times \vec{e}_2$,

on dit qu'elle est directe



③ Si $-\vec{e}_3 = \vec{e}_1 \times \vec{e}_2$, elle est indirecte

④ $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$

$(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \lambda (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times (\lambda \vec{b})$

⑤ $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{c})$



$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{c}) + (\vec{b} \times \vec{c})$

⑥ $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}$ linéairement dépendant, (ou $\vec{a} = \lambda \vec{b}$)

⑦ $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$

⑧ $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} = 0$

$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{b} = 0$

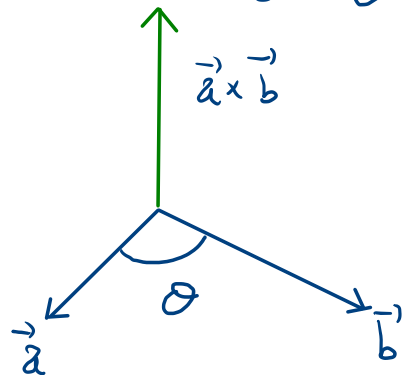
⑨ $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$

Interprétation géométrique du produit vectoriel

Proposition Soit $\vec{a}, \vec{b} \in V_3$

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \sin(\theta)$$

où $\theta \in [0; 180^\circ]$ est l'angle entre $\vec{a}$ et $\vec{b}$

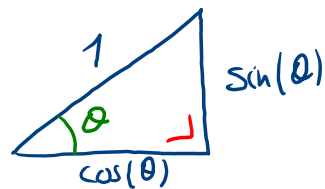


Preuve : Par l'identité de Lagrange

$$\begin{aligned} \|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 &= \|\vec{a}\|^2 \cdot \|\vec{b}\|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \\ &= \|\vec{a}\|^2 \cdot \|\vec{b}\|^2 - (\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cos(\theta))^2 \\ &= \|\vec{a}\|^2 \cdot \|\vec{b}\|^2 - \|\vec{a}\|^2 \cdot \|\vec{b}\|^2 \cos^2(\theta) \\ &= \|\vec{a}\|^2 \cdot \|\vec{b}\|^2 (1 - \cos^2(\theta)) \\ &= \|\vec{a}\|^2 \cdot \|\vec{b}\|^2 \sin^2(\theta) \end{aligned}$$

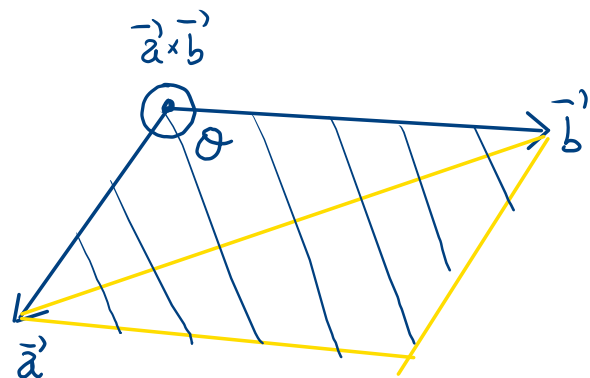
cqfd

(hauteur du ∇
 $\sim$
 parallélogramme)²



$$\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$$

Géométriquement



donc

$\|\vec{a} \times \vec{b}\|$ est l'aire du ∇ construit
 sur $\vec{a}$ et $\vec{b}$

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \sin(\theta)$$

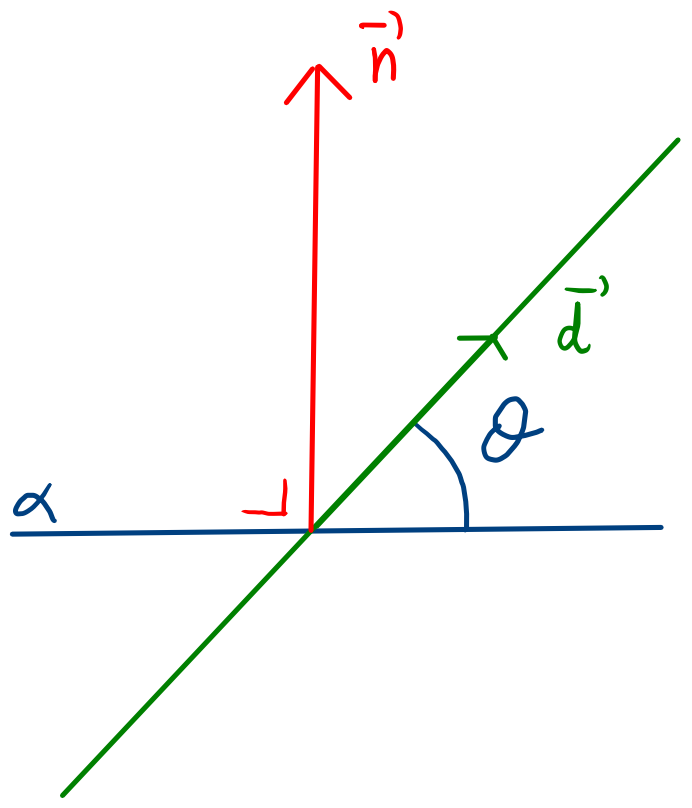
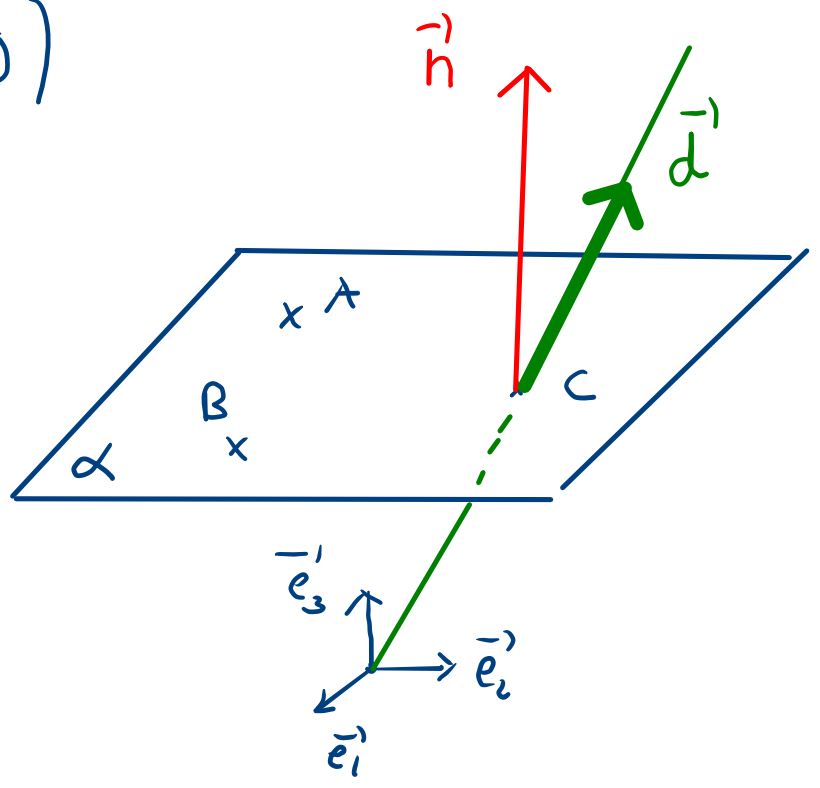
1.5.4 On donne les vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$. Existe-t-il un vecteur $\vec{x}$ tel que $\vec{a} \times \vec{x} = \vec{b}$? **NON**

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 + 10 + 21 \neq 0 \Rightarrow \vec{a} \text{ pas orthogonal à } \vec{b} \text{ donc impossible}$$

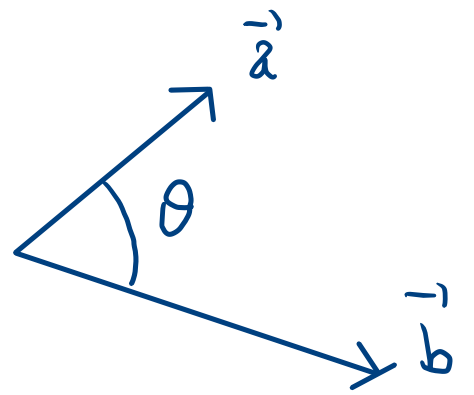
1.5.5 Calculer l'angle aigu que forme la droite OC avec le plan ABC , dans les cas suivants :

- a) $A(1; 0; 0)$, $B(0; 1; 0)$ et $C(2; 2; -4)$.
- b) $A(0; 1; 0)$, $B(1; 0; 1)$ et $C(1; 2; 2)$.

$O(0; 0; 0)$



Angle entre deux vecteurs :



$$\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos(\theta) = \vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\|}$$