

Propriétés du produit scalaire

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ par rapport à une base orthonormée.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

1) Le produit scalaire est un nombre réel

2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ commutativité

3) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

4) $\lambda \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda \vec{b})$ où $\lambda \in \mathbb{R}$

5) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$

6) $\vec{a} \cdot \vec{0} = 0$

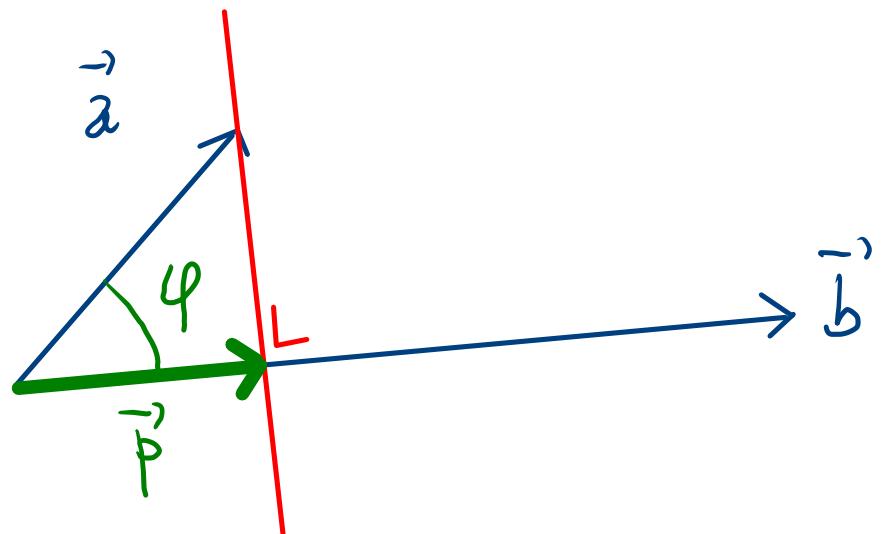
7) $\vec{a} \cdot \vec{a} = a_1^2 + a_2^2 = \|\vec{a}\|^2$

8) $\|\vec{a} - \vec{b}\|^2 = (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \|\vec{a}\|^2 - 2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} + \|\vec{b}\|^2$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} \left(\|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - \|\vec{a} - \vec{b}\|^2 \right)}$$

Le produit scalaire ne dépend pas de la base choisie.

Retour sur la projection orthogonale



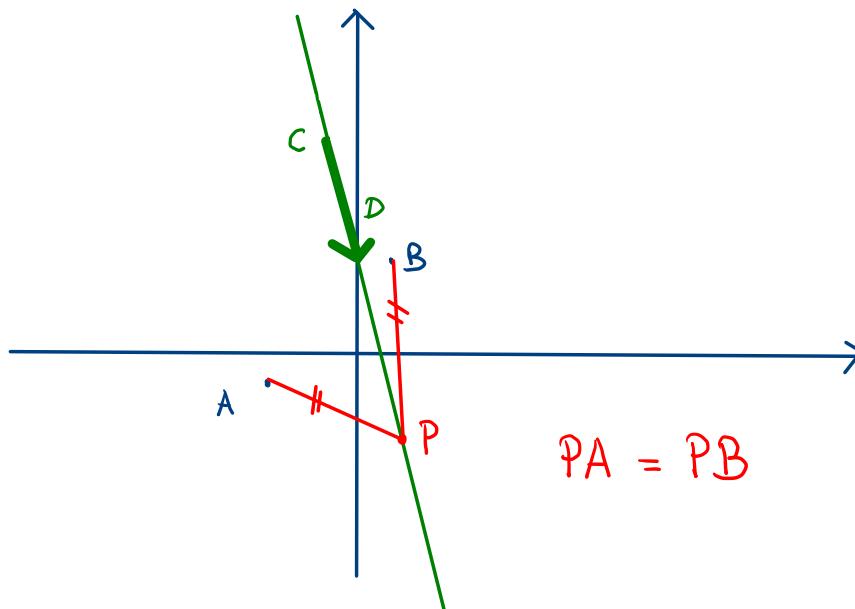
$$1) \quad \vec{p} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{b}\|^2} \vec{b}$$

1)+2)
03.10.25

$$2) \quad \|\vec{p}\| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{\|\vec{b}\|}$$

$$\cos(\varphi) = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{\|\vec{b}\| \|\vec{a}\|} \quad \Rightarrow \quad |\vec{a} \cdot \vec{b}| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos(\varphi)$$

1.4.21 Soit $A(-3; -1)$, $B(1; 3)$, $C(-1; 7)$ et $D(0; 3)$. Déterminer le point P de la droite CD qui est situé à la même distance des points A et B .



$$\begin{aligned}\vec{CD} &= \vec{OD} - \vec{OC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}1) \quad \vec{OP} &= \vec{OC} + \underline{\vec{CP}} = \vec{OC} + \underline{k \cdot \vec{CD}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+k \\ 7-4k \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow P(-1+k; 7-4k)\end{aligned}$$

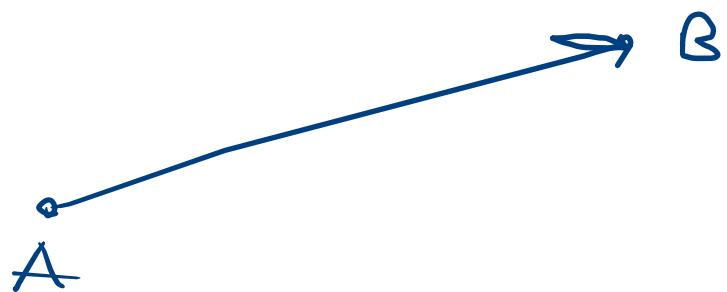
$$\begin{aligned}2) \quad \|\vec{AP}\| &= \|\vec{BP}\| \\ \vec{AP} &= \vec{OP} - \vec{OA} = \begin{pmatrix} -1+k \\ 7-4k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k+2 \\ -4k+8 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\|\vec{AP}\|^2 = (k+2)^2 + (-4k+8)^2 = \dots$$

$$\vec{BP} = \vec{OP} - \vec{OB} = \begin{pmatrix} -1+k \\ 7-4k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k-2 \\ -4k+4 \end{pmatrix}$$

$$\|\vec{BP}\|^2 = (k-2)^2 + (-4k+4)^2 = \dots$$

$$\vec{AB} = \vec{AN} + \vec{NB}$$



+

\vec{n}

$$\vec{AB} = \vec{TB} - \vec{TA}$$

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$$

A diagram illustrating vector addition using a closed triangle. Point A is marked with a small circle and labeled 'A'. Point B is marked with a small circle and labeled 'B'. Point O is marked with a small circle and labeled 'O'. A curved arrow starts at point A, goes around point B, and ends at point O, forming a closed loop. Below this diagram is the equation:

$$\vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OB}$$