Propriétés du produit scalaire

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ par rapport à une base orthonormée.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

1) Le produit scalaire est un nombre réel

2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ commutativité

3) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

4) $\lambda \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda \vec{b})$ où $\lambda \in \mathbb{R}$

5) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \iff \vec{a} \perp \vec{b}$

6) $\vec{a} \cdot \vec{0} = 0$

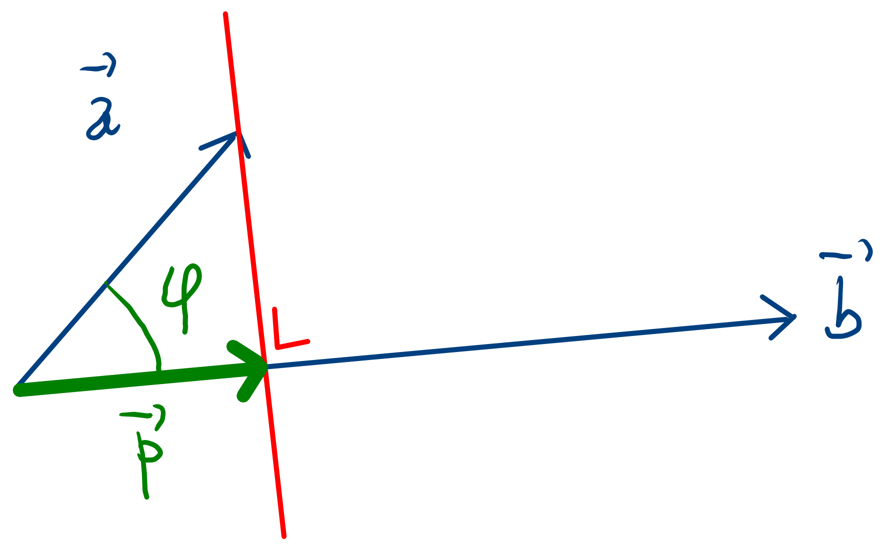
7) $\vec{a} \cdot \vec{a} = a_1^2 + a_2^2 = \|\vec{a}\|^2$

8) $\|\vec{a} - \vec{b}\|^2 \underset{7)}{=} (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) \underset{3}{=} \|\vec{a}\|^2 - 2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} + \|\vec{b}\|^2$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - \|\vec{a} - \vec{b}\|^2 \right)}$$

Le produit scalaire ne dépend pas de la base choisie.

Retour sur la projection orthogonale



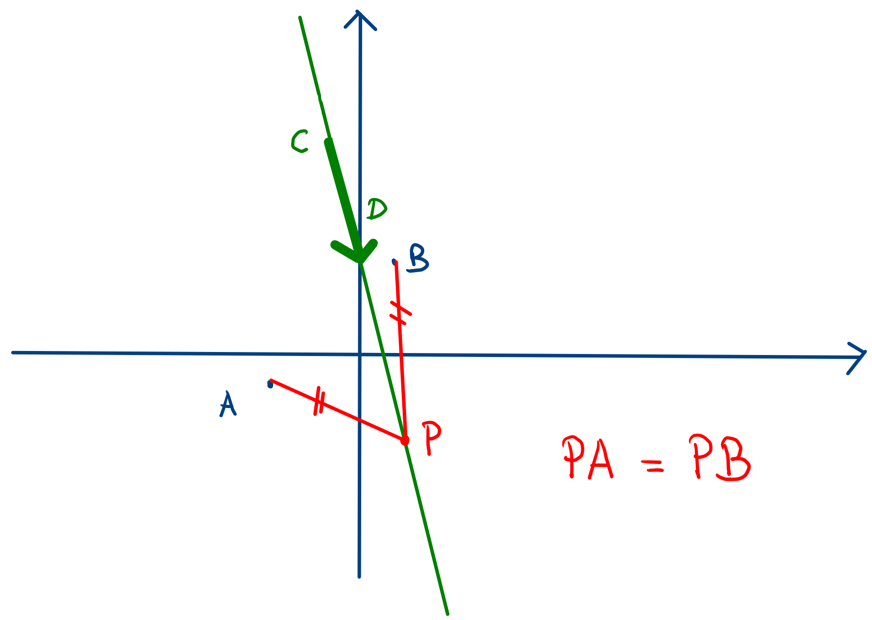
1) $\vec{p} = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{b}\|^2} \vec{b}$

1)+2)
03.10.25

2) $\|\vec{p}\| = \dfrac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{\|\vec{b}\|}$

$$\cos(\varphi) = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{\|\vec{b}\| \, \|\vec{a}\|} \quad \Rightarrow \quad |\vec{a} \cdot \vec{b}| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos(\varphi)$$

1.4.21 Soit $A(-3;-1)$, $B(1;3)$, $C(-1;7)$ et $D(0;3)$. Déterminer le point P de la droite CD qui est situé à la même distance des points A et B.



PA = PB

$$\vec{CD} = \vec{OD} - \vec{OC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

1) $\vec{OP} = \vec{OC} + \vec{CP} = \vec{OC} + K \cdot \vec{CD} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix} + K \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + K \\ 7 - 4K \end{pmatrix}$

$\Rightarrow P(-1+K ; 7-4K)$

2) $\|\vec{AP}\| = \|\vec{BP}\|$

$\vec{AP} = \vec{OP} - \vec{OA} = \begin{pmatrix} -1+K \\ 7-4K \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K+2 \\ -4K+8 \end{pmatrix}$

$\|\vec{AP}\|^2 = (K+2)^2 + (-4K+8)^2 = \dots$

$\vec{BP} = \vec{OP} - \vec{OB} = \begin{pmatrix} -1+K \\ 7-4K \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K-2 \\ -4K+4 \end{pmatrix}$

$\|\vec{BP}\|^2 = (K-2)^2 + (-4K+4)^2 = \dots$

$$\vec{AB} = \vec{AM} + \vec{MB}$$

$$\vec{AB} = \vec{TB} - \vec{TA}$$

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$$

$$\vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OB}$$