12.09.25

1.2.9 Relativement à une base $\mathfrak{B}$ de V_2, on donne les vecteurs

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \end{pmatrix}$$

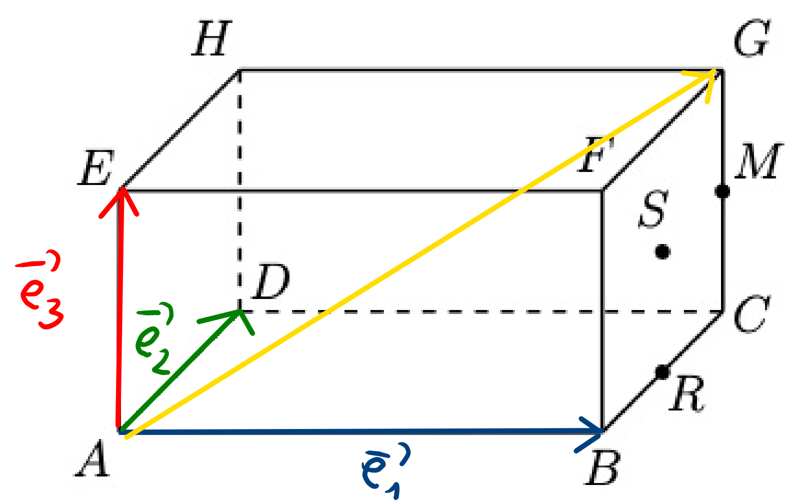
Calculer les nombres k et m tels que $k\vec{a} + m\vec{b} = \vec{c}$.

$$k \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2k + 3m = 12 \\ 4k - 9m = -6 \end{cases} \quad \begin{array}{|c|c} k & m \\ \cdot 2 & \cdot 3 \\ \cdot(-1) & \cdot 1 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 15m = 30 \\ 10k = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ k = 3 \end{cases}$$

1.2.12 On considère un parallélépipède $ABCDEFGH$ de centre K. Les points M et R sont les milieux respectifs des arêtes $[CG]$ et $[BC]$ et S est le centre de la face $BCGF$.

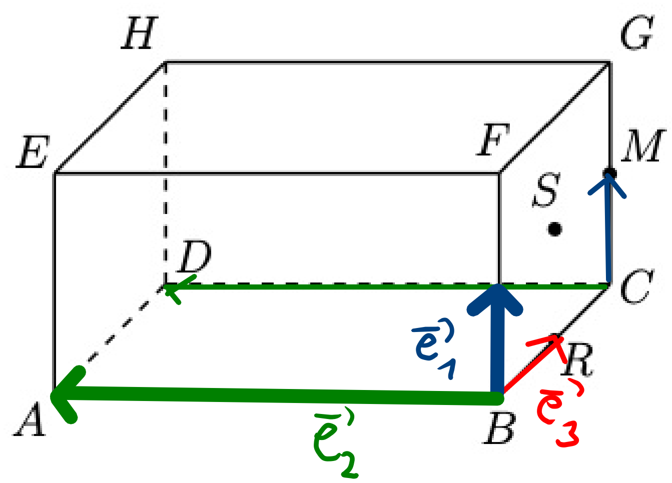


a) Donner, relativement à la base $\mathfrak{B}_1 = \left(\underset{\vec{e_1}}{\overrightarrow{AB}};\ \underset{\vec{e_2}}{\overrightarrow{AD}};\ \underset{\vec{e_3}}{\overrightarrow{AE}}\right)$ les composantes des vecteurs

$$\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AE},\ \overrightarrow{AF},\ \overrightarrow{AG},\ \overrightarrow{AH},\ \overrightarrow{AM},\ \overrightarrow{AS},\ \overrightarrow{AR},\ \overrightarrow{AK}.$$

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AG} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

1.2.12 On considère un parallélépipède $ABCDEFGH$ de centre K. Les points M et R sont les milieux respectifs des arêtes $[CG]$ et $[BC]$ et S est le centre de la face $BCGF$.



b) Mêmes questions relativement à la base $\mathfrak{B}_2 = \left(\underset{\vec{e}_1}{\overrightarrow{CM}};\ \underset{\vec{e}_2}{\overrightarrow{CD}};\ \underset{\vec{e}_3}{\overrightarrow{BR}}\right)$

Vecteurs colinéaires

Deux vecteurs sont colinéaires s'ils ont la même direction.

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \iff \exists\, \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } \vec{a} = k\vec{b}$$

① Dans le plan, $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, on a :

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kb_1 \\ kb_2 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a_1 = kb_1 \\ a_2 = kb_2 \end{cases}$$

$$\iff a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$$

$$k b_1 b_2 - k b_2 b_1 = 0$$

Résultat : $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \parallel \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \iff \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$

$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$ est le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$

1.3.1 Relativement à une base $\mathfrak{B}$ de V_2, on considère les vecteurs :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \vec{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}, \vec{g} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3/2 \end{pmatrix}, \vec{h} = \begin{pmatrix} 1/9 \\ 1/3 \end{pmatrix}, \vec{i} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2/3 \end{pmatrix}.$$

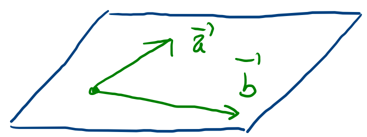
Regrouper les vecteurs qui sont colinéaires.

$\vec{a} \overset{?}{\wedge} \vec{b}$: $\quad 1 \cdot (-1) - 0 \cdot 3 = -1 \neq 0$ pas colinéaires

- $\vec{a} \wedge \vec{d} \wedge \vec{e} \wedge \vec{h}$
- $\vec{b} \wedge \vec{e} \wedge \vec{i}$
- $\vec{c} \wedge \vec{e} \wedge \vec{g}$
- $\vec{f} \wedge \vec{e}$

Vecteurs coplanaires dans l'espace

- Deux vecteurs sont toujours coplanaires



- Trois vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$

  sont coplanaires s'il existe $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ non tous nuls tels que

$$\lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} + \lambda_3 \vec{c} = \vec{0}$$

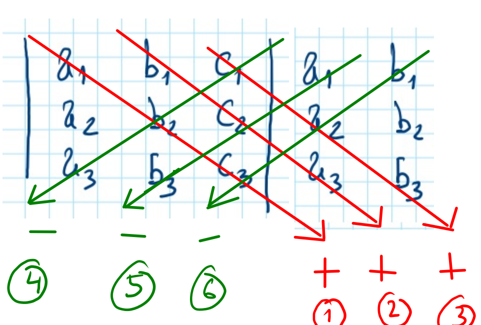
  En fait $\vec{a}, \vec{b}$ et $\vec{c}$ sont linéairement dépendants. On peut écrire $x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{c}$, avec $x, y \in \mathbb{R}$

Résultat

$\vec{a}, \vec{b}$ et $\vec{c}$ sont linéairement dépendants $\Longleftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$

où $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - c_1 b_2 a_3 - a_1 c_2 b_3 - b_1 a_2 c_3$

Pour calculer ce déterminant, on utilise la règle de Sarrus :



$= a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3$

$\quad - c_1 b_2 a_3 - a_1 c_2 b_3 - b_1 a_2 c_3$

Démonstration

① $\Leftarrow$ A venir !

② $\Rightarrow$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & x a_1 + y b_1 \\ a_2 & b_2 & x a_2 + y b_2 \\ a_3 & b_3 & \underbrace{x a_3 + y b_3}_{\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}} \end{vmatrix} = \begin{array}{|ccc|cc} a_1 & b_1 & x a_1 + y b_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & x a_2 + y b_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & x a_3 + y b_3 & a_3 & b_3 \\ - & - & - & & \\ & & + & + & + \end{array}$$

$$= a_1 b_2 (x a_3 + y b_3) + b_1 a_3 (x a_2 + y b_2) + a_2 b_3 (x a_1 + y b_1)$$

$$- b_2 a_3 (x a_1 + y b_1) - a_1 b_3 (x a_2 + y b_2) - b_1 a_2 (x a_3 + y b_3) = 0$$

1.3.4 Déterminer dans chaque cas si les trois vecteurs sont coplanaires :

a) $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$ oui

c) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ -11 \\ 4 \end{pmatrix}$

a) $$\left|\begin{matrix} 3 & 5 & 13 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 7 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 3 & 5 \\ 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{matrix} = 21 - 10 + 0 + 13 - 24 - 0$$

$-\quad -\quad -\quad +\quad +\quad +$

$$= 0$$