

1.5.13 Déterminer k et $\vec{x}$ de telle sorte que $\vec{a} \times \vec{x} = \vec{b}$, si $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} k \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$.

On peut trouver $k = -27$.

Par contre, on laisse la suite pour l'année prochaine !

1.5.18

a) Vérifier que $ABCD EFGH$ est un parallélépipède et calculer son volume si :

$$A(-1; -1; 7)$$

$$C(0; 1; 6)$$

$$E(2; -2; 3)$$

$$G(3; 0; 2)$$

$$B(-2; 1; 6)$$

$$D(1; -1; 7)$$

$$F(1; 0; 2)$$

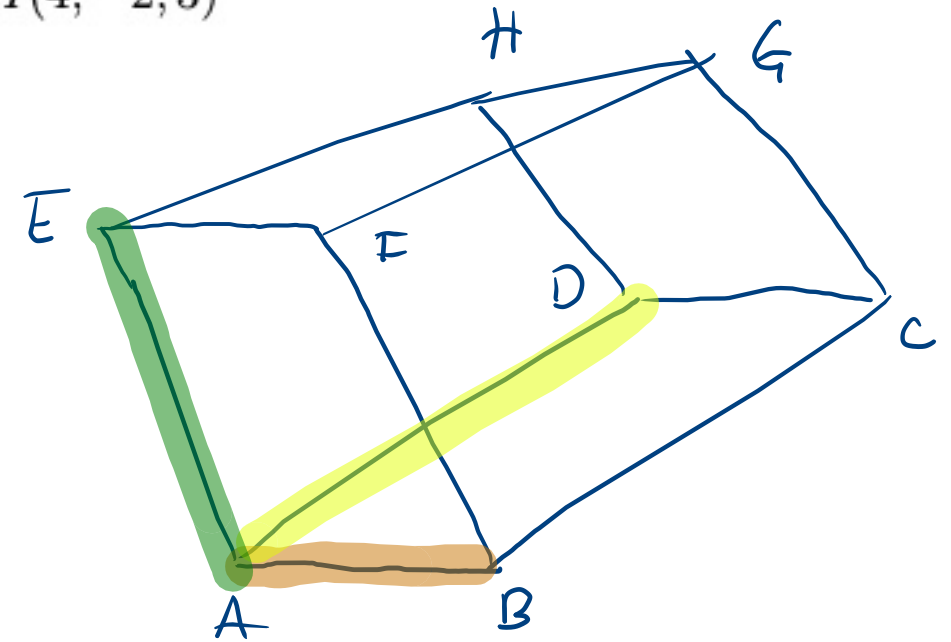
$$H(4; -2; 3)$$

$$\vec{AB} = \vec{DC} = \vec{HG} = \vec{EF} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AD} = \vec{BC} = \vec{FG} = \vec{EH} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AE} = \vec{BF} = \vec{CG} = \vec{DH} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$V = \left| [\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE}] \right| = 18$$



est le volume

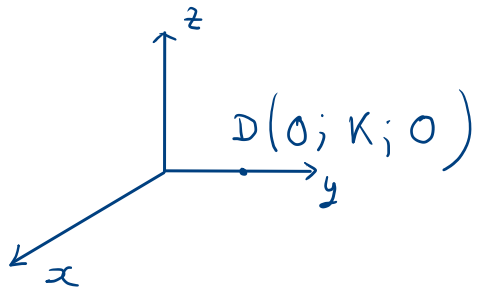
b) Calculer le volume du tétraèdre $PQRS$ si

$$P(2; -1; 1), \quad Q(5; 5; 4), \quad R(3; 2; -1), \quad S(4; 1; 3).$$

$$\vec{PQ} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{PR} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \vec{PS} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$V = \frac{1}{6} \left| [\vec{PQ}, \vec{PR}, \vec{PS}] \right| = 3 \text{ [u}^3\text{]}$$

- c) Soit $A(2; 1; -1)$, $B(3; 0; 1)$, $C(2; -1; 3)$. Déterminer un point D situé sur l'axe Oy tel que le tétraèdre $ABCD$ ait un volume égale à 5.



$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{AD} = \begin{pmatrix} -2 \\ K-1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$V = \frac{1}{6} \left| [\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}] \right| = 5$$

$$[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & K-1 & -1 & -2 \\ 2 & 4 & 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -2 + 8 - 8 - 4(K-1) = 2 - 4K$$

On résout $|2 - 4K| = 30$

$$\textcircled{1} \quad 2 - 4K = 30$$

$$4K = -28$$

$$K = -7$$

$$\textcircled{2} \quad 2 - 4K = -30$$

$$4K = 32$$

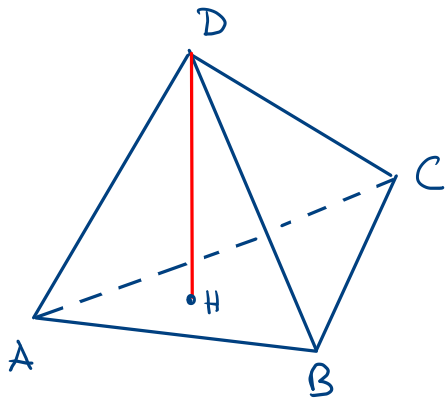
$$K = 8$$

Deux points $D_1(0; -7; 0)$ et $D_2(0; 8; 0)$

tel que le tétraèdre $ABCD$ ait un volume égal à 8.

d) Calculer la hauteur issue de D dans le tétraèdre $ABCD$ si :

$$A(2; 3; 1), \quad B(4; 1; -2), \quad C(6; 3; 7), \quad D(-5; -4; 8).$$



$$\vec{DH} \perp \text{plan}(ABC)$$

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \vec{AD} = \begin{pmatrix} -7 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Hauteur issue de D :

$$V = \frac{\text{Aire}(ABC) \cdot DH}{3}$$

$$\textcircled{1} \text{ Volume du tétraèdre : } \frac{1}{6} \left| [\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}] \right| = \frac{1}{6} \cdot 308 = \frac{308}{6} = \frac{154}{3}$$

$$\textcircled{2} \text{ Aire du } \triangle ABC : \frac{1}{2} \left\| \underbrace{\vec{AB} \times \vec{AC}}_{\begin{pmatrix} -12 \\ -24 \\ 8 \end{pmatrix}} \right\| = \frac{1}{2} \cdot 28 = 14$$

$$\begin{array}{l|l} \text{D'où l'équation : } \frac{154}{3} = \frac{1}{3} \cdot 14 \cdot h & \cdot 3 \\ 154 = 14h & \div 14 \\ h = 11 & \end{array}$$

1.5.20 On donne les points

$$A(1; 4; 1)$$

$$B(-2; -8; 3)$$

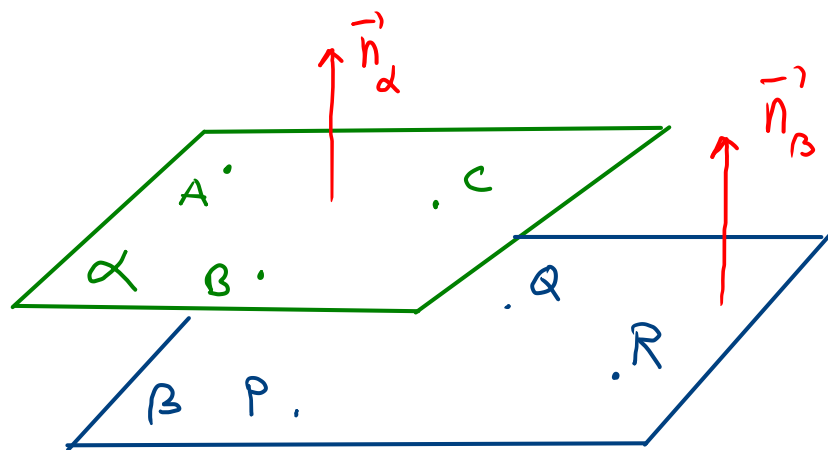
$$C(-5; -11; 5)$$

$$P(3; 5; -1)$$

$$Q(3; -11; -1)$$

$$R(0; -3; 1)$$

Démontrer que les plans ABC et PQR sont parallèles.



$$\alpha // \beta \Leftrightarrow \vec{n}_\alpha \wedge \vec{n}_\beta$$

$$① \quad \vec{n}_\alpha = \vec{AB} \times \vec{AC}$$

$$\vec{n}_\alpha = \begin{pmatrix} -18 \\ 0 \\ -27 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$② \quad \vec{n}_\beta = \vec{PQ} \times \vec{PR}$$

$$\vec{n}_\beta = \begin{pmatrix} -32 \\ 0 \\ -48 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}_\alpha \wedge \vec{n}_\beta \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha // \beta$$