14.11.25

Définition

On note $\mathbb{R}[x]$ l'ensemble des polynômes en x.

Ex :

$$P_1 = 3x^3 - 3x^2 + 7$$

$$P_2 = -x^{99} + 1$$

$$P_3 = t^3 + 1 \notin \mathbb{R}[x], \quad P_3 \in \mathbb{R}[t]$$

$$P_4 = \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{7}x + \frac{1}{9} \in \mathbb{R}[x]$$

$$q = \frac{x^2 - 1}{x^3 + 1} \notin \mathbb{R}[x]$$

- $\sin(x)$, e^x, $\sqrt{x}$ $\notin \mathbb{R}[x]$

2.1.6 Soit $p(x) = 2\,x^3 - 3\,x^2 + 5\,x - 1$ et $q(x) = 3\,x^3 + 2\,x^2 - 4\,x + 2$. Déterminer

a) le polynôme $p + q$

b) le degré du polynôme $p \cdot q$, ainsi que le coefficient de son terme de degré 4.

$$p(x) = 2\,x^3 - 3\,x^2 + 5\,x - 1$$

$$p = 2x^3 - 3x^2 + 5x - 1$$

$$q = 3x^3 + 2x^2 - 4x + 2$$

a) $p + q = 5x^3 - x^2 + x + 1$

- 2 est le coefficient dominant de p
- -1 est le facteur constant de p
- 3 est le degré de p

b) $\text{degré}(p \cdot q) = \deg(p \cdot q) = \deg(p) + \deg(q)$

$\text{degré}(p + q) \leq \max(p, q)$

$p = x^2 \;,\; q = -x^2 + x \Rightarrow \deg(p+q) = 1$

c) $p = K \in \mathbb{R}^* \;,\; \deg(p) = 0$

$p = 0 \;,\; \deg(p) = -\infty$

- $p = x^3 + 1 \;,\; q = 4$
- $p = x^3 + 1 \;,\; q = 0 \Rightarrow p \cdot q = 0$

$\deg(p \cdot q) = 3 + (-\infty) = -\infty$

Soit $p(x) = 2\,x^3 - 3\,x^2 + 5\,x - 1$ et $q(x) = 3\,x^3 + 2\,x^2 - 4\,x + 2$.

Pour multiplier p et q, on utilise un tableau

	$2x^3$	$-3x^2$	$5x$	-1
$3x^3$	$6x^6$	$-9x^5$	$15x^4$	$-3x^3$
$2x^2$	$4x^5$	$-6x^4$	$10x^3$	$-2x^2$
$-4x$	$-8x^4$	$12x^3$	$-20x^2$	$4x$
2	$4x^3$	$-6x^2$	$10x$	-2

$p \cdot q = 6x^6 - 5x^5 + x^4 + 23x^3 - 28x^2 + 14x - 2$

Le coefficient de son terme de degré 4 est 1.

2.1.7 Soit $p(x) = x^2 + x + 2$ et $q(x) = x^3 - 2\,x$. Déterminer les polynômes

$$p + q, \quad p - q, \quad \text{et} \quad p \cdot q$$

	x^3	$-2x$
x^2	x^5	$-2x^3$
x	x^4	$-2x^2$
2	$2x^3$	$-4x$

	x^3	$0x^2$	$-2x$	0
x^2	x^5	0	$-2x^3$	0
x	x^4	0	$-2x^2$	0
2	$2x^3$	0	$-4x$	0

$$p \cdot q = x^5 + x^4 - 2x^2 - 4x$$

Produits remarquables

$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$	$(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$
$(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$	$A^2 + B^2$ n'est pas factorisable

$(A+B+C)^2 = A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2AC + 2BC$

$(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$	$(A-B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$
$(A+B)(A^2 - AB + B^2) = A^3 + B^3$	$(A-B)(A^2 + AB + B^2) = A^3 - B^3$

1. Mise en évidence
2. Formule
3. Trinôme
4. Groupement
5. Division euclidienne 2, 3

Calcul algébrique

$$\begin{tikzcd}
(x+4)^2 \arrow[r, bend left, "\text{développer}"] & x^2+8x+16 \arrow[l, bend left, "\text{Factorisation}"]
\end{tikzcd}$$

m) $(x-3)(x+1)+2(x-3)^2-(x-3) = (x-3)\left[(x+1)+2(x-3)-1\right]$

$= (x-3)(3x-6)$

$= 3(x-3)(x-2)$

d) $\underbrace{(a+b)}^2 - x^2 = (a+b-x)(a+b+x)$

$A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$

o) $a^4 + 9b^2 - 6a^2b = \underbrace{(a^2)^2 - 2\cdot 3a^2\cdot b + (3b)^2}_{\text{inutile}} = (a^2-3b)^2$

$(a^2)^2 \qquad (3b)^2$

$(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$

d) $z^3 + 8a^3b^6 = (z)^3 + (2ab^2)^3 = (z+2ab^2)(z^2 - 2ab^2z + 4a^2b^4)$

$A^3 + B^3 = (A+B)(A^2 - AB + B^2)$

f) $z^3 - 6z^2 + 12z - 8 = (z-2)^3$

$z^3 \qquad (-2)^3$

$(A-B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$

i) $6x^2 + 5x + 1 = \underline{(3x+1)(2x+1)}$

zeros: $6x^2 + 5x + 1 = 0$

$\Delta = 25 - 24 = 1 = 1^2$

$x_1 = \frac{-5+1}{12} = \frac{-4}{12} = \frac{-1}{3}$

$x_2 = \frac{-5-1}{12} = \frac{-6}{12} = \frac{-1}{2}$

$6\left(x + \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right) = 6\left(x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{6}\right)$

$= 6\left(x^2 + \frac{5}{6}x + \frac{1}{6}\right) = 6x^2 + 5x + 1$

l) $8y^4 - 8y^3 + y - 1$

$= 8y^3(y-1) + 1(y-1)$

$= (y-1)[8y^3+1]$

$= (y-1)(2y+1)(4y^2-2y+1)$

2.2.3 Factoriser :

a) $x^{12} - 125$

factorisable : impossible

$$(x^4)^3 - 5^3 = (x^4 - 5)\overbrace{(x^8 + 5x^4 + 25)}$$

$$= \underline{(x^2 - \sqrt{5})(x^2 + \sqrt{5})(x^8 + 5x^4 + 25)}$$