19.09.25

1.3.7 On donne les points $A(5;2;-3)$, $B(8;0;5)$, $C(-2;-4;1)$ et $D(4;-6;3)$. Calculer les composantes des vecteurs suivants :

a) $\overrightarrow{AB}$

b) $\overrightarrow{BD}$

c) $\overrightarrow{CA}$

d) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$

e) $\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}$

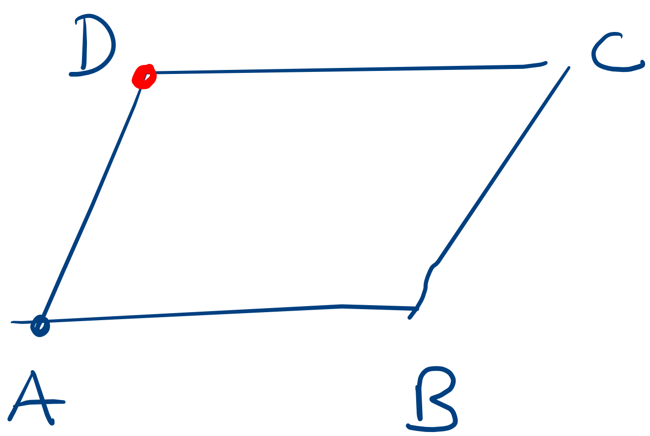
f) $4\overrightarrow{CD}-3\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BC}\right)$

Relation de Chasles : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

e) $$\begin{aligned}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} &= \underbrace{\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}} + \overrightarrow{DB} \\ &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DB} \\ &= \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DA}\end{aligned}$$

1.3.8 On donne les points $A(1;1)$, $B(10;5)$ et $C(4;12)$. Calculer les coordonnées du point D tel que :

a) $ABCD$ soit un parallélogramme b) $ABDC$ soit un parallélogramme

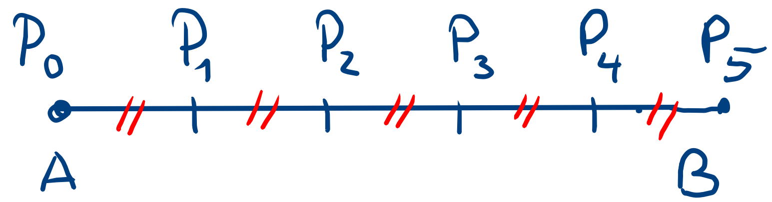


$$P(a,b,c) \Leftrightarrow \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

a) $$\overrightarrow{OD} = \underbrace{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BD}}_{\text{moche}} = \overrightarrow{OA} + \underbrace{\overrightarrow{AD}}_{\overrightarrow{BC}} = \overrightarrow{OA} + \underbrace{\overrightarrow{BC}}_{\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \end{pmatrix} \Rightarrow D(-5;8)$$

1.3.9 Calculer les coordonnées des points qui divisent le segment $[AB]$ en cinq parties égales, si $A(2;3)$ et $B(3;8)$.



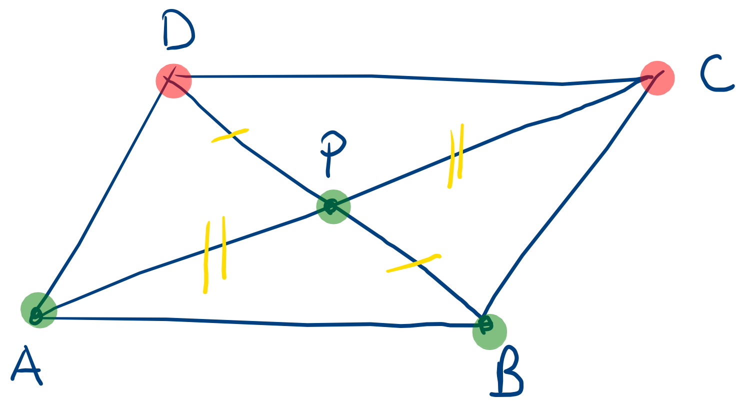
$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{P_0P_1} = \vec{P_1P_2} = \ldots = \vec{P_4P_5} = \frac{1}{5}\vec{AB} = \begin{pmatrix} 1/5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $\vec{OP_1} = \underbrace{\vec{OP_0}}_{\vec{OA}} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1/5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,2 \\ 4 \end{pmatrix}$
- $\vec{OP_2} = \vec{OA} + 2\begin{pmatrix} 1/5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,4 \\ 5 \end{pmatrix}$

...

1.3.10 On donne les sommets $A(3;-2;5)$ et $B(7;5;10)$ d'un parallélogramme $ABCD$, ainsi que le point d'intersection $P(5;4;6)$ de ses diagonales. Calculer les coordonnées des deux autres sommets C et D.



$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PC} \quad ; \quad \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

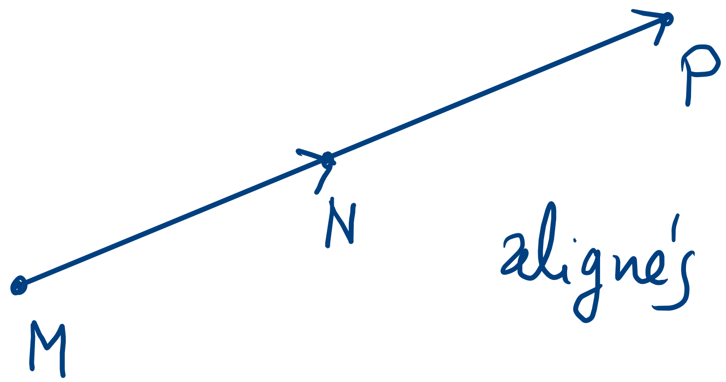
$$\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{PD} \quad ; \quad \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

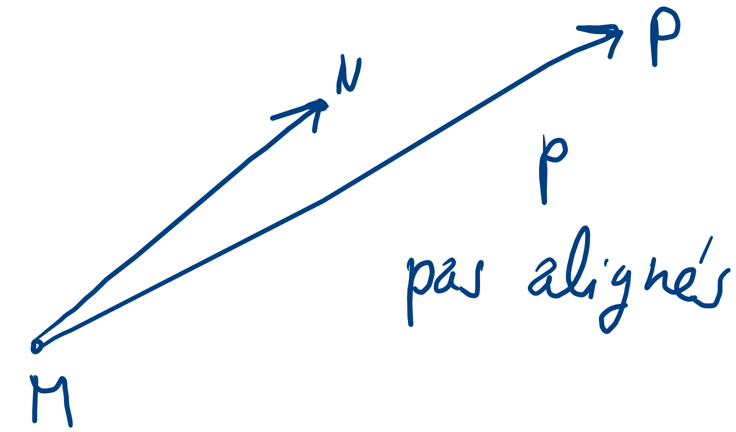
$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \\ 7 \end{pmatrix} \Rightarrow C(7;10;7)$$

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PD} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{BP} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow D(3;3;2)$$

1.3.11 Les points M, N et P suivants sont-ils alignés ?

$$M(13;-22;2) \qquad N(-5;-10;26) \qquad P(-38;12;60)$$





$$\boxed{M, N, P \text{ alignés} \iff \overrightarrow{MN} \parallel \overrightarrow{MP}}$$

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} -5 \\ -10 \\ 26 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 13 \\ -22 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ 12 \\ 24 \end{pmatrix} = 6 \overbrace{\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}}^{\vec{n}} = 6\vec{n}$$

$$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} -38 \\ 12 \\ 60 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 13 \\ -22 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -51 \\ 34 \\ 58 \end{pmatrix} = 17 \underbrace{\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 58/17 \end{pmatrix}}_{\vec{p}} = 17\vec{p}$$

$\vec{n}$ et $\vec{p}$ non colinéaires $\Rightarrow$ M, N, P pas alignés.

1.3.12 Déterminer dans chaque cas la constante k pour les points A, B et C soient alignés :

a) $A(1;2)$, $B(-3;3)$ et $C(k;1)$

b) $A(2;k)$, $B(7k-29;5)$ et $C(-4;2)$.

$$\boxed{\vec{a} \parallel \vec{b} \iff \det(\vec{a}, \vec{b}) = 0}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

a) $\vec{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{AC} = \begin{pmatrix} K \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K-1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\vec{AB} \parallel \vec{AC} \iff \begin{vmatrix} -4 & K-1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 4 - (K-1) = 5 - K = 0 \iff K = 5$$

b) $\vec{CA} = \vec{OA} - \vec{OC} = \begin{pmatrix} 2 \\ K \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ K-2 \end{pmatrix}$

$\vec{CB} = \vec{OB} - \vec{OC} = \begin{pmatrix} 7K-29 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7K-25 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\vec{CA} \parallel \vec{CB} \iff \begin{vmatrix} 6 & 7K-25 \\ K-2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \iff 18 - (K-2)(7K-25) = 0$$

$$\iff 18 - (7K^2 - 25K - 14K + 50) = 0 \iff -7K^2 + 39K - 32 = 0$$

$$\iff 7K^2 - 39K + 32 = 0$$

$$\iff (7K - 32)(K - 1) = 0$$

$$\iff \underline{K = \frac{32}{7} \text{ et } K = 1}$$

1.3.13 On donne trois points A, B et C. Déterminer, dans les cas suivants, le nombre réel α pour qu'ils soient alignés :

a) $A(2;3;5)$, $B(3;5;8)$, $C(5;9;\alpha)$.

b) $A(\alpha;-3;-4)$, $B(3;1;0)$, $C(0;\alpha+2;\alpha+1)$.

a) $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\vec{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ \alpha-5 \end{pmatrix}$ $\Bigg\}$ $9 = \alpha - 5 \Rightarrow \alpha = 14$

b) $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-\alpha \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\vec{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha+2 \\ \alpha+1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha \\ \alpha+5 \\ \alpha+5 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} 3-\alpha & -\alpha \\ 4 & \alpha+5 \end{vmatrix} = 0$

$\vec{AB} \backsim \vec{AC} \Leftrightarrow$ il existe k tel que $\vec{AB} = k\vec{AC}$

On doit avoir $(3-\alpha)(\alpha+5) = -4\alpha$

$3\alpha - \alpha^2 + 15 - 5\alpha = -4\alpha$

$-\alpha^2 - 2\alpha + 15 + 4\alpha = 0$

$\alpha^2 - 2\alpha - 15 = 0$

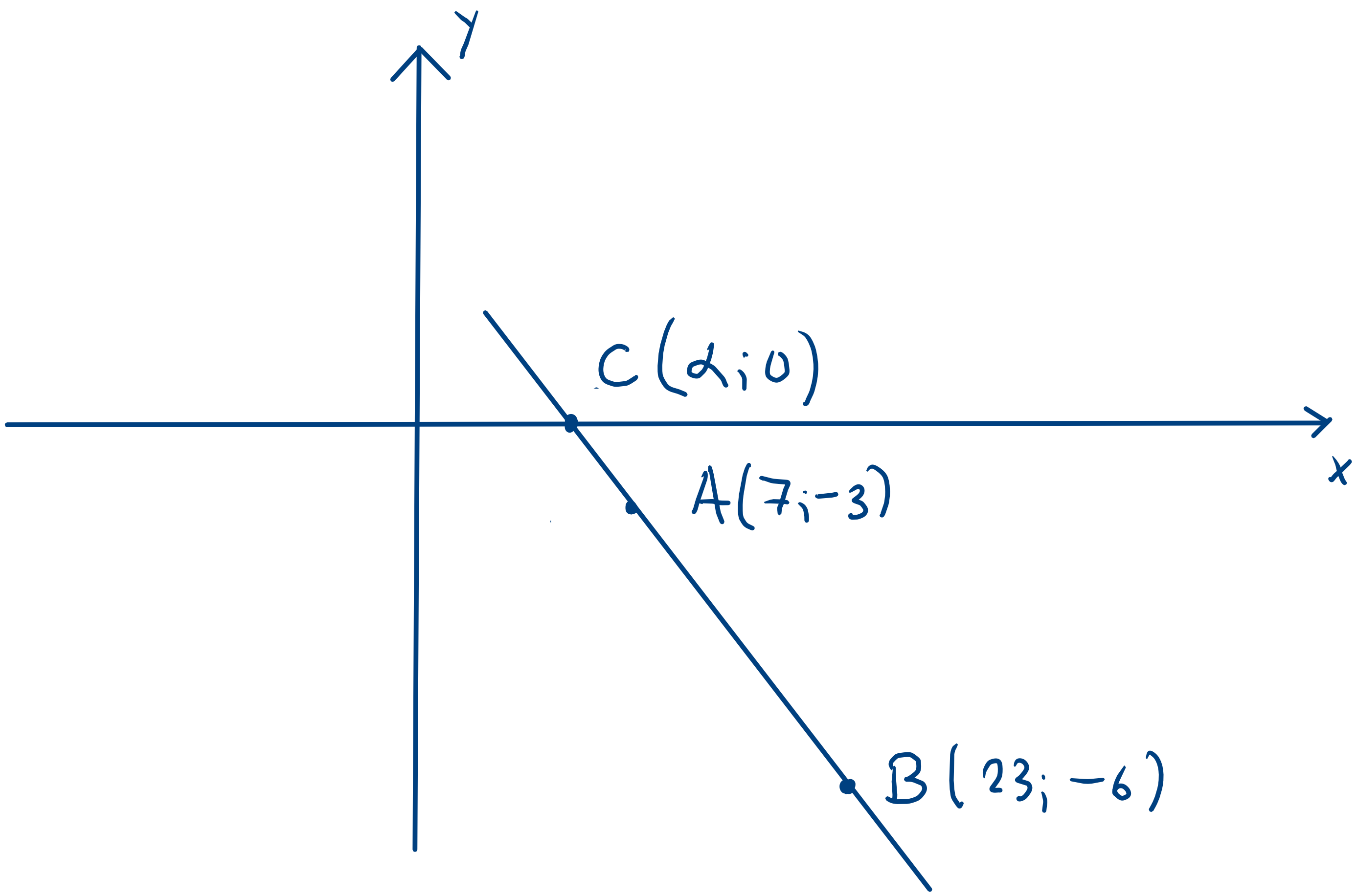
$(\alpha + 3)(\alpha - 5) = 0$

$\alpha = -3$, $\alpha = 5$

• $\alpha = -3$: $\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \backsim \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ ✓

• $\alpha = 5$: $\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \backsim \begin{pmatrix} -5 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} \backsim \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ ✓

1.3.14 On donne $A(7; -3)$ et $B(23; -6)$. Déterminer le point C de l'axe Ox qui est aligné avec A et B.



$\vec{AC} \parallel \vec{AB}$ ou $\vec{CA} \parallel \vec{CB}$ ou $\vec{BA} \parallel \vec{BC}$