

Produits remarquables

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

$$(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$$

$$(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$$

$A^2 + B^2$ n'est pas factorisable

$$(A + B + C)^2 = A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2AC + 2BC$$

$$(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$$

$$(A - B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$$

$$(A + B)(A^2 - AB + B^2) = A^3 + B^3$$

$$(A - B)(A^2 + AB + B^2) = A^3 - B^3$$

2.2.3 Factoriser :

$$\text{a) } x^{12} - 125 =$$

$$A^3 - B^3$$

$$\text{b) } a^4 - \frac{8ab^3}{27} = a \left(a^3 - \frac{8b^3}{27} \right) = a \left(a^3 - \left(\frac{2b}{3} \right)^3 \right)$$

$$= a \left(a - \frac{2b}{3} \right) \left(a^2 + \frac{2ab}{3} + \frac{4b^2}{9} \right)$$

$$(A - B) (A^2 + AB + B^2)$$

2.2.6 Factoriser :

$$\begin{aligned} \text{k) } 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 &= (1 + x + x^2) + x^3(1 + x + x^2) \\ &= (1 + x + x^2) [1 + x^3] \\ &= \underline{(1 + x + x^2)(1 - x + x^2)(1 + x)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{k) } 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 &= (1 + x) + x^2(1 + x) + x^4(1 + x) \\ &= (1 + x) \underline{(1 + x^2 + x^4)} \end{aligned}$$

Division euclidienne dans $\mathbb{N}$

Effectuons la division en colonne avec reste de 127 par 9

$$\begin{array}{r|l} 127 & 9 \\ - 9 & 1 \\ \hline 37 & \\ - 36 & 4 \\ \hline \text{reste } 1 & \end{array}$$

$$10 \times 9 = 90$$

$$4 \times 9 = 36$$

Egalité : $127 = 14 \cdot 9 + 1$

Dividende quotient reste
diviseur

Théorème

Soit D et d deux nombres entiers non nuls.
Il existe deux entiers q et r tels que

① $D = q \cdot d + r$

② $r < d$

Division euclidienne dans $\mathbb{R}[x]$

Effectuons la division euclidienne de

$$D = 4x^3 - 8x^2 + 2x - 3, \quad \deg(D) = 3$$

$$d = 2x^2 - 1, \quad \deg(d) = 2$$

$$\begin{array}{r|l} 4x^3 - 8x^2 + 2x - 3 & 2x^2 - 1 \\ \hline - 4x^3 & 2x \\ \hline & - 8x^2 + 4x \\ - & - 8x^2 & + 4 \\ \hline & \text{reste : } 4x - 7 \end{array}$$

$$2x(2x^2 - 1) = 4x^3 - 2x$$

$$-4(2x^2 - 1) = -8x^2 + 4$$

$$\begin{array}{r} 4x^3 - 8x^2 - 2x + 4 \\ + \quad \quad \quad 4x - 7 \\ \hline 4x^3 - 8x^2 + 2x - 3 \end{array}$$

Egalité fondamentale :

$$\begin{aligned} 4x^3 - 8x^2 + 2x - 3 &= (2x - 4) \cdot (2x^2 - 1) + 4x - 7 \\ D &= (2x - 4) \cdot d + (4x - 7) \end{aligned}$$

Théorème

Soit D et d dans $\mathbb{R}[x]$.

Il existe q et r dans $\mathbb{R}[x]$ tels que

$$1) \quad D = q \cdot d + r$$

$$2) \quad \deg(r) < \deg(d)$$

2.3.1 Effectuer la division euclidienne de $A(x)$ par $B(x)$ dans chacun des cas suivants et poser l'égalité fondamentale correspondante :

a) $A = x^3 - 8x^2 + 16x - 5$

$B = x - 5$

$$\begin{array}{r|l}
 x^3 - 8x^2 + 16x - 5 & x - 5 \\
 - x^3 - 5x^2 & x^2 \\
 \hline
 -3x^2 + 16x - 5 & -3x \\
 - -3x^2 + 15x & \\
 \hline
 x - 5 & + 1 \\
 x - 5 & \\
 \hline
 0 &
 \end{array}$$

$$A = (x^2 - 3x + 1) \cdot B$$

On dit que B divise A

$$c) A(x) = x^4 - 3x^3 + x - 5$$

$$B(x) = x^2 - 3$$

$$\begin{array}{r}
 x^4 - 3x^3 \dots + x - 5 \\
 - \quad x^4 \qquad \qquad - 3x^2 \\
 \hline
 \qquad - 3x^3 + 3x^2 + x - 5 \\
 - \quad - 3x^3 \qquad \qquad + 9x \\
 \hline
 \qquad \qquad 3x^2 - 8x - 5 \\
 \qquad \quad 3x^2 \qquad - 9 \\
 \hline
 \qquad \qquad - 8x + 4
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 x^2 - 3 \\
 \hline
 x^2 - 3x + 3
 \end{array}$$

$$A = (x^2 - 3x + 3) B + (-8x + 4)$$