

Polynômes de $\mathbb{R}[x]$

- Addition, soustraire
- Multiplier
- Division avec reste

2.3.4 Déterminer le polynôme $\overset{P}{\downarrow}$ tel que le quotient de sa division euclidienne par $2x^2 + 1$ soit $5x^2 - 3x + 1$ et le reste $1 - x$.
 $\underset{q}{}$ $\underset{r}{}$

$$P = q \cdot d + r$$

$$= (5x^2 - 3x + 1)(2x^2 + 1) + (-x + 1)$$

$$= \underline{10x^4} + \underline{5x^2} - \underline{6x^3} - \underline{3x} + \underline{2x^2} + \underline{1} - \underline{x} + \underline{1}$$

$$\underline{P = 10x^4 - 6x^3 + 7x^2 - 4x + 2}$$

2.3.6 Effectuer la division euclidienne de $t^5 - 7t^4 - t^2 - 9t + 9$ par $t^2 - 5t + 4$.

$$\begin{array}{r|l}
 D \div t^5 - 7t^4 \dots - t^2 - 9t + 9 & t^2 - 5t + 4 = d \\
 \hline
 - t^5 - 5t^4 + 4t^3 & t^3 - 2t^2 - 14t - 63 = q \\
 \hline
 & -2t^4 - 4t^3 - t^2 \\
 & -2t^4 + 10t^3 - 8t^2 \\
 \hline
 & -14t^3 + 7t^2 - 9t \\
 & -14t^3 + 70t^2 - 56t \\
 \hline
 & -63t^2 + 47t + 9 \\
 & -63t^2 + 315t - 252 \\
 \hline
 & -268t + 261 = r
 \end{array}$$

$$D = q \cdot d + r$$

2.3.5 Calculer la valeur numérique $P(a)$ du polynôme $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x - 7$ pour chacune des valeurs a suivantes : 1, 3, 0, -2, -3, $1/3$ et $-1/2$.

$$P = 2x^3 - 3x^2 + 5x - 7$$

(fonction

$$P : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto P(x)$$

$$P(1) = 2 \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 - 7 = 2 - 3 + 5 - 7 = -3$$

$$P(3) = 2 \cdot 27 - 3 \cdot 9 + 5 \cdot 3 - 7 = 35$$

$$P(0) = -7$$

$$P\left(\frac{1}{3}\right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 - 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 5 \cdot \frac{1}{3} - 7 = \frac{2}{27} - \frac{1}{3} + \frac{5}{3} - 7 = \frac{2 - 9 + 45 - 189}{27} = \frac{-151}{27}$$

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonction

$x \mapsto x^2$

x	$f(x)$
-2	4
-1	1
0	1
1	1
2	4

2.3.7 Trouver un polynôme P de degré ≤ 2 tel que

$$P(1) = -2 \quad \text{et} \quad P(-2) = 3 \quad \text{et} \quad P(0) = -1$$

$$P = ax^2 + bx + c$$

$$\begin{aligned} P(1) = -2 : & \quad \begin{cases} a + b + c = -2 \\ 4a - 2b + c = 3 \\ c = -1 \end{cases} \\ P(-2) = 3 : & \\ P(0) = -1 : & \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = -1 \\ 4a - 2b = 4 \\ c = -1 \end{cases} \quad \left| \begin{array}{c} b \\ \cdot 2 \\ \cdot 1 \end{array} \right| \begin{array}{c} a \\ \cdot 4 \\ \cdot (-1) \end{array}$$

$$\begin{cases} 6a = 2 \\ 6b = -8 \\ c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = -\frac{4}{3} \\ c = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{P = \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x - 1}$$

2.3.8 Calculer le reste de la division euclidienne du polynôme $a(x)$ par le polynôme $b(x)$.

a) $a(x) = 4x^3 - 10x^2 + 11x - 5$ et $b(x) = x - 1$

$$\begin{array}{r|l}
 4x^3 - 10x^2 + 11x - 5 & x-1 \\
 \hline
 - 4x^3 - 4x^2 & 4x^2 - 6x + 5 \\
 \hline
 & -6x^2 + 11x \\
 - & -6x^2 + 6x \\
 \hline
 & 5x - 5 \\
 & 5x - 5 \\
 \hline
 & r = 0
 \end{array}$$

$$\underbrace{4x^3 - 10x^2 + 11x - 5}_D = \underbrace{(x-1)}_d \cdot \underbrace{(4x^2 - 6x + 5)}_q + 0$$

Comme $\deg(d) = 1$, $\deg(r) < 1 \Rightarrow r \in \mathbb{R}$

$$D(1) = \underbrace{(1-1)}_0 \cdot (\dots) + r$$

$$D(1) = 0 \cdot (\dots) + r$$