

28.11.25

Théorème ♥

Soit $P \in \mathbb{R}[x]$ et $a \in \mathbb{R}$.

$x - a$ divise P si et seulement si $P(a) = 0$

Démonstration

$$(x-a) \mid P \Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{R}[x] \text{ tq } P = (x-a) \cdot q \Leftrightarrow P(a) = (a-a) \cdot q(a) = 0$$



cqfd qed

Théorème ♥

Soit $p \in \mathbb{R}[x]$ et $a \in \mathbb{R}$.

Le reste de la division de p par $x - a$ est égal à $p(a)$

Démonstration

Il existe $q \in \mathbb{R}[x]$ et $r \in \mathbb{R}$ tels que $p = (x-a) \cdot q + r$

Donc $p(a) = (a-a)q(a) + r = 0 + r = r$. 

2.3.9 Déterminer, sans effectuer la division, le reste de la division euclidienne de $A(x)$ par $B(x)$ dans les cas suivants :

a) $A(x) = 2x^3 - x^2 + 5x - 1$ $B(x) = x - 3$

b) $A(x) = x^4 - x + 1$ $B(x) = x + 2$

c) $A(x) = x^3 - 27$ $B(x) = x - 3$

2) $x - 3 \Rightarrow A(3) = 2 \cdot 3^3 - 3^2 + 5 \cdot 3 - 1 = 54 - 9 + 15 - 1 = 59$

$$\begin{array}{r|l}
 2x^3 - x^2 + 5x - 1 & x - 3 \\
 \hline
 - 2x^3 - 6x^2 & \\
 \hline
 5x^2 + 5x & \\
 - 5x^2 - 15x & \\
 \hline
 20x - 1 & \\
 - 20x - 60 & \\
 \hline
 r : 59 &
 \end{array}$$

b) reste : $A(-2) = 19$

c) reste : $A(3) = 0$

$\Leftrightarrow x - 3 \mid x^3 - 27$

2.3.11 Considérons le polynôme $P(x) = x^4 + 2x^3 - 16x^2 - 2x + 15$. Déterminer s'il est divisible par :

a) $x - 1$ b) $x + 4$ c) $x + \frac{1}{2}$ d) $x + 1$ e) $x + 5$ f) $x - 3$

En déduire une factorisation de $P(x)$.

But Factoriser $p = x^4 + 2x^3 - 16x^2 - 2x + 15$

a) $p(1) = 0$ $\Rightarrow$ ① $x - 1 / p$

b) $p(-4) = -105$ ☹️

c) $p(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{16} - \frac{1}{4} - 4 + 1 + 15 = \frac{129}{16}$ ☹️

d) $p(-1) = 0$ $\Rightarrow$ ② $x + 1 / p$

e) $p(-5) = 0$ $\Rightarrow$ ③ $x + 5 / p$

f) $p(3) = 0$ $\Rightarrow$ ④ $x - 3 / p$

$$p = (x - 1)(x + 1)(x + 5)(x - 3)$$

Théorème

Soit $p = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

Si $x + \alpha \mid p$ alors $\alpha \mid a_0$.

Démonstration :

Si $x + \alpha$ divise p , il existe $q \in \mathbb{R}$ tel que $p = (x + \alpha)q$.

On écrit $q = x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \dots + b_0$.

$$\begin{aligned} x^n + \dots + \underline{a_0} &= (x + \alpha)(x^{n-1} + \dots + b_0) \\ &= x^n + \dots + \underline{\alpha \cdot b_0} \end{aligned}$$

Donc $a_0 = \alpha \cdot b_0$, donc $\alpha \mid a_0$.

2.3.12 Trouver les zéros entiers du polynôme

a) $2x^3 - 14x + 12$,

b) $x^4 - 6x^3 + x - 6$.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad p &= 2x^3 - 14x + 12 \\ &= 2(\underbrace{x^3 - 7x + 6}_{p_1}) \end{aligned}$$

$$p_1 = x^3 - 7x + 6$$

On cherche les zéros entiers de p_1

$$p(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x-1 / p_1 \quad \checkmark$$

$$p(-1) = 12 \quad \checkmark$$

$$p(2) = 0 \quad \Rightarrow \quad x-2 / p_1 \quad \checkmark$$

$$p(-2) = 12$$

$$p(3) = 12$$

$$p(-3) = 0 \quad \Rightarrow \quad x+3 / p_1$$

$$p(6) = 180$$

$$p(-6) = -168$$

$$\text{Donc} \quad p = 2(x-1)(x-2)(x+3)$$

2.3.12 Trouver les zéros entiers du polynôme

a) $2x^3 - 14x + 12$,

b) $x^4 - 6x^3 + x - 6$.

$$p = x^4 - 6x^3 + x - 6$$

Les zéros entiers apparaissent dans la liste : $\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6$

$1 + 6 - 1 - 6 = 0$

- $p(-1) = 0 \Rightarrow x+1 / p$
- $p(6) = 0 \Rightarrow x-6 / p$

$$\left\{ \frac{(x+1)(x-6)}{x^2 - 5x - 6} / p \right.$$

Factorisons complètement p .

$\begin{array}{r} x^4 - 6x^3 \dots + x - 6 \\ - x^4 - 5x^3 - 6x^2 \\ \hline -x^3 + 6x^2 + x \\ - -x^3 + 5x^2 + 6x \\ \hline x^2 - 5x - 6 \\ - x^2 - 5x - 6 \\ \hline r: 0 \end{array}$	$\begin{array}{r} x^2 - 5x - 6 \\ \hline x^2 - x + 1 \end{array}$
--	---

$$p = (x+1)(x-6) \underbrace{(x^2 - x + 1)}_{\text{pas factorisable } \Delta < 0}$$