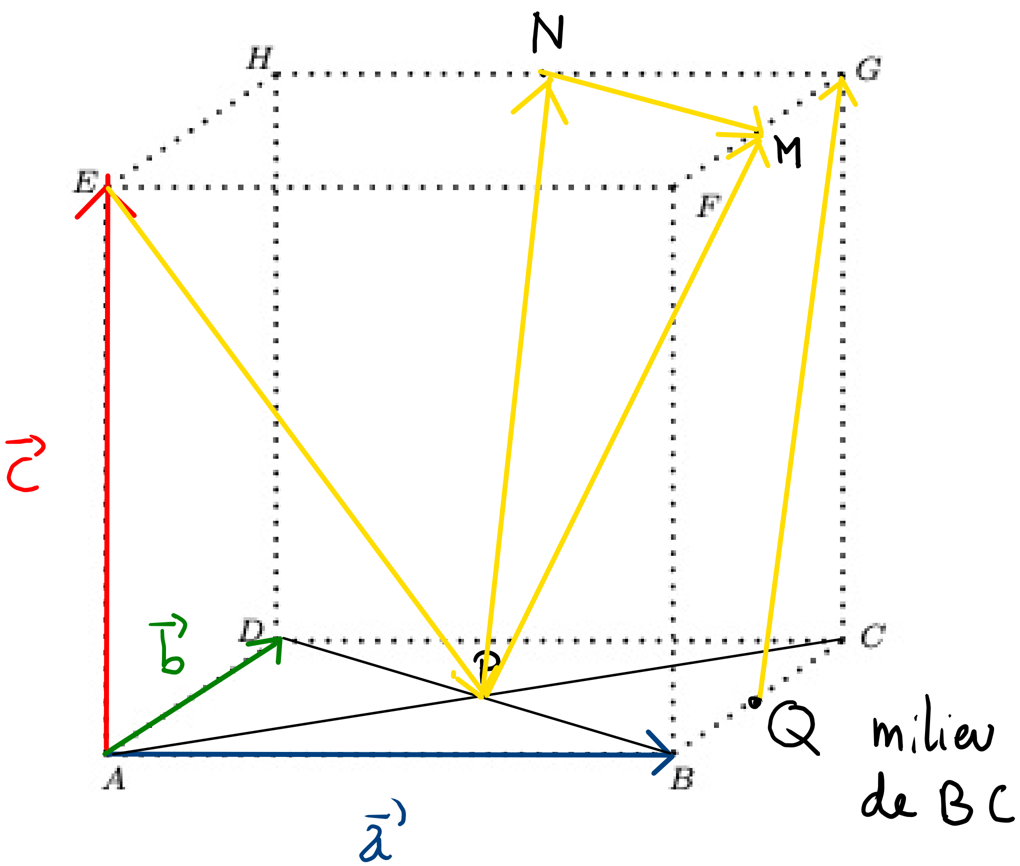
29.08.25

1.1.13 Soit $ABCD\ EFGH$ un cube pour lequel on pose $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ et $\vec{c} = \overrightarrow{AE}$. Soit M le milieu du côté FG, N celui de HG et P le centre de la face $ABCD$. Faire une figure d'étude puis exprimer les vecteurs suivants comme combinaison linéaire de $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$: $\overrightarrow{EP}$, $\overrightarrow{EM}$, $\overrightarrow{EN}$, $\overrightarrow{NM}$, $\overrightarrow{PN}$, $\overrightarrow{NP}$, et $\overrightarrow{PM}$.



$$\begin{aligned}\overrightarrow{EP} &= \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AP}\\ &= -\vec{c} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}\\ &= -\vec{c} + \tfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right)\\ &= -\vec{c} + \tfrac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{b}\right)\\ &= \tfrac{1}{2}\vec{a} + \tfrac{1}{2}\vec{b} - \vec{c}\end{aligned}$$

$\overrightarrow{EN} = \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{HN} = \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a}$; $\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{GM}$

$= \vec{b} + \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$

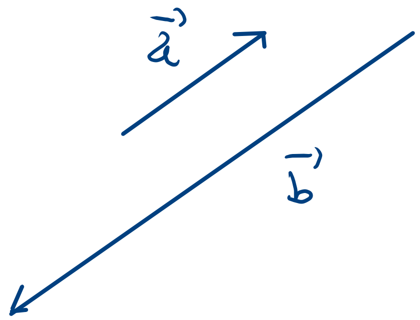
$\overrightarrow{NM} = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$

$\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{QG} = \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$; $\overrightarrow{PM} = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{c}$

Vecteurs colinéaires, vecteurs coplanaires

V_2, V_3

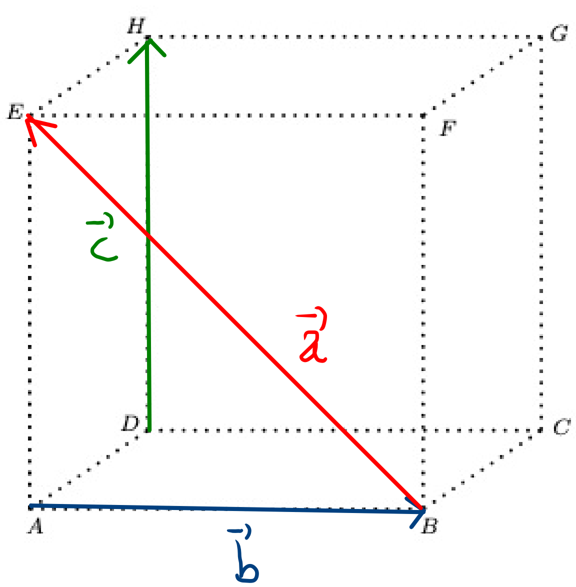
Deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont **colinéaires** s'il existe un nombre K tel que $\vec{a} = K \cdot \vec{b}$



On note $\vec{a} \sim \vec{b}$.

Trois vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ sont **coplanaires** s'il existe deux nombres K et s tels que $\vec{a} = K\,\vec{b} + s\,\vec{c}$

V_3

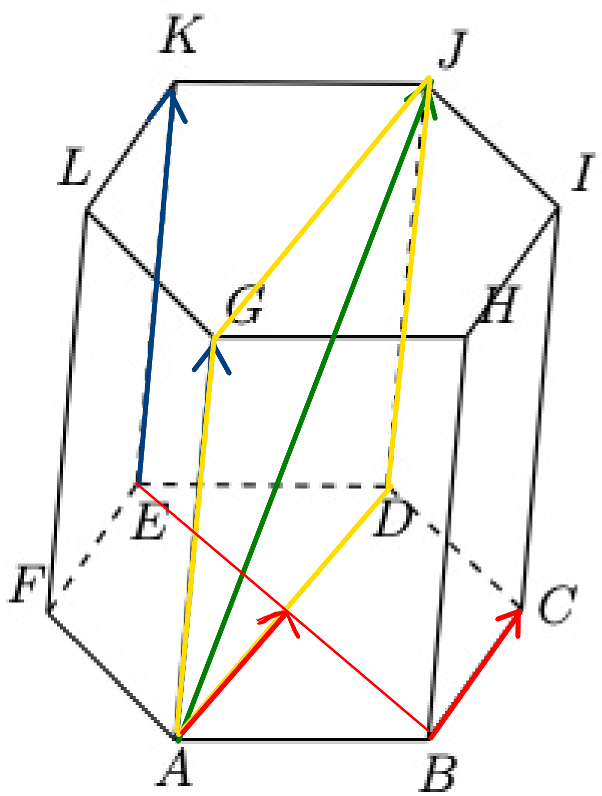


$$\vec{a} = -\vec{b} + \vec{c}$$

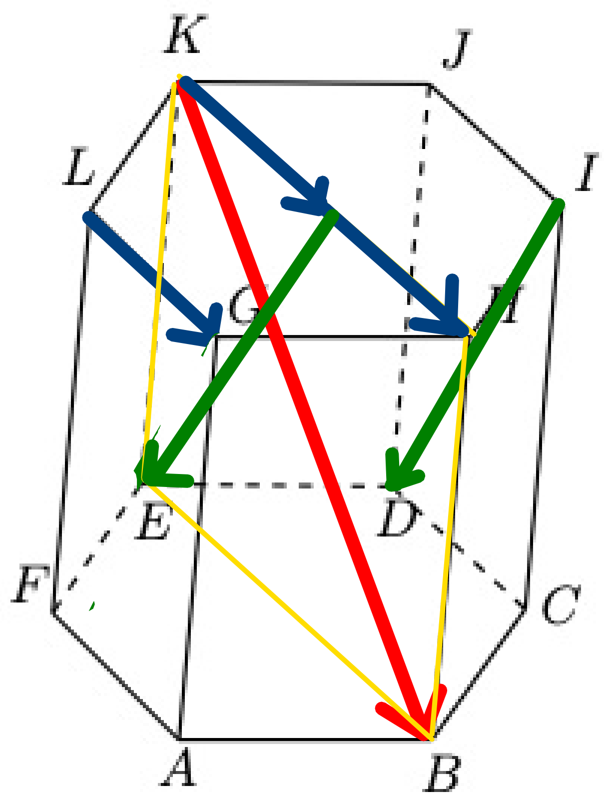
On dit aussi que les trois vecteurs sont dans un même plan (vectoriel).

1.2.1 On considère un prisme $ABCDEF\ GHIJKL$ dont les bases sont des hexagones réguliers. Dans chacun des cas suivants, déterminer si les trois vecteurs donnés sont coplanaires. Le cas échéant, exprimer l'un d'eux comme combinaisons linéaires des deux autres.

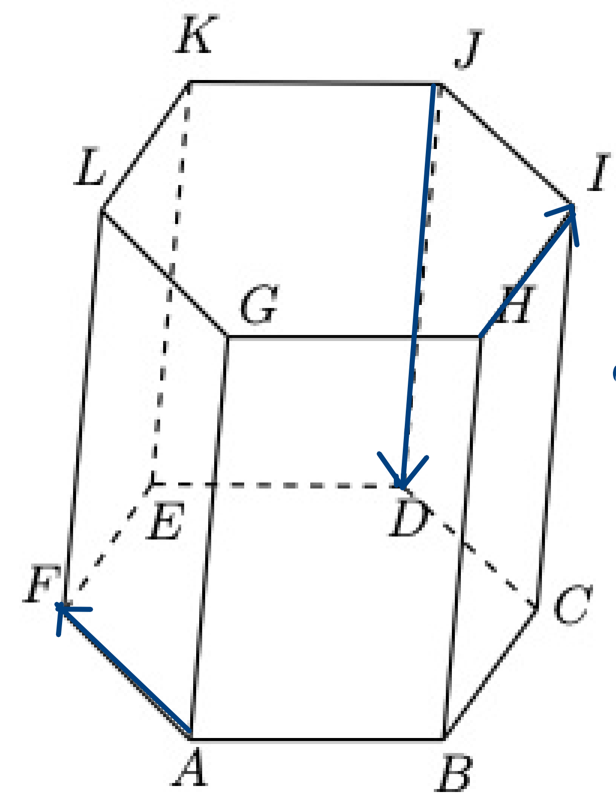
a) $\overrightarrow{AJ}$, $\overrightarrow{EK}$, $\overrightarrow{BC}$



b) $\overrightarrow{LG}$, $\overrightarrow{ID}$, $\overrightarrow{KB}$



c) $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{JD}$, $\overrightarrow{HI}$

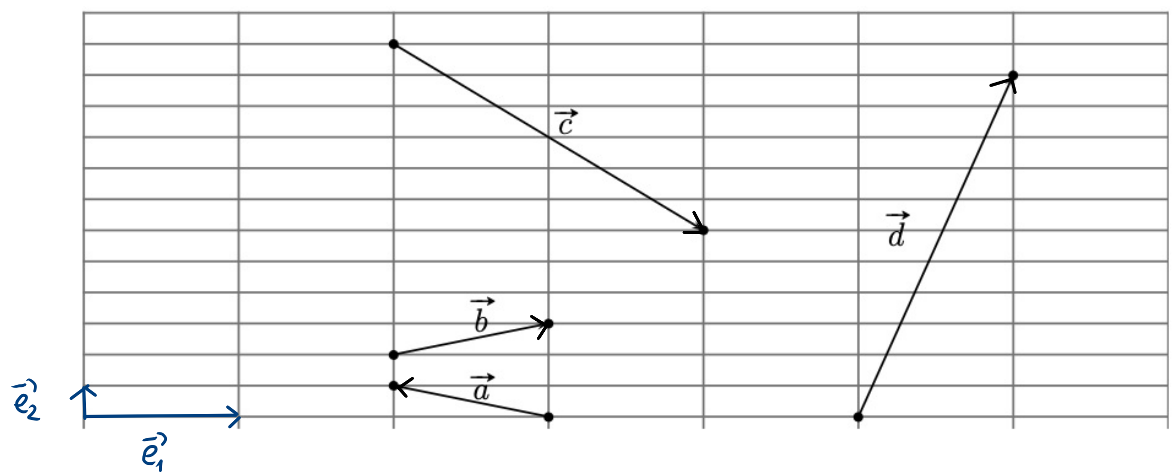


pas coplanaires

a) $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DJ} = 2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DJ} = 2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EK}$

b) $\overrightarrow{KB} = 3\overrightarrow{LG} + \overrightarrow{ID}$

1.2.4 Exprimer les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ comme combinaison linéaire de $\vec{c}$ et $\vec{d}$ si :



①
$$\boxed{\begin{aligned} \vec{a} &= -\vec{e_1} + \vec{e_2} \\ \vec{b} &= \vec{e_1} + \vec{e_2} \end{aligned}}$$

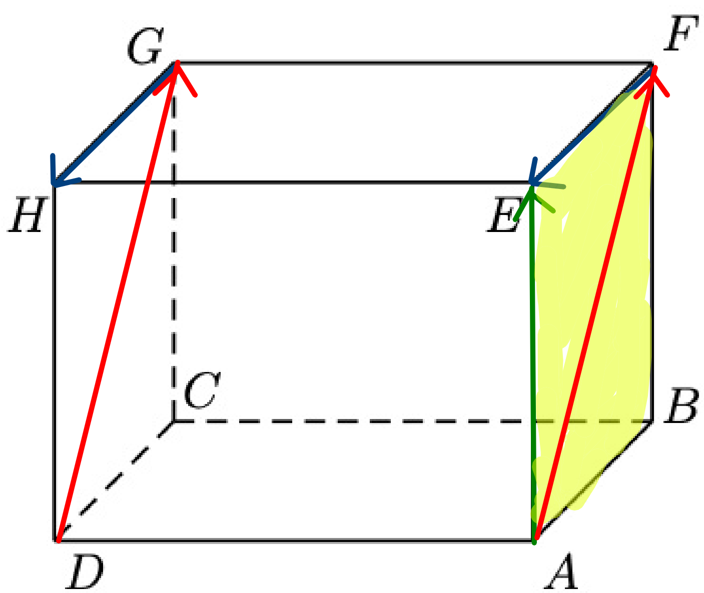
②
$$\boxed{\begin{aligned} \vec{c} &= 2\vec{e_1} - 6\vec{e_2} \\ \vec{d} &= \vec{e_1} + 11\vec{e_2} \end{aligned}}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \vec{c} &= 2\vec{e_1} - 6\vec{e_2} \\ \vec{d} &= \vec{e_1} + 11\vec{e_2} \end{aligned} \right. \quad \begin{array}{c|c|c} & \vec{e_1} & \vec{e_2} \\ & \cdot 1 & \cdot 11 \\ & \cdot(-2) & \cdot 6 \end{array}$$

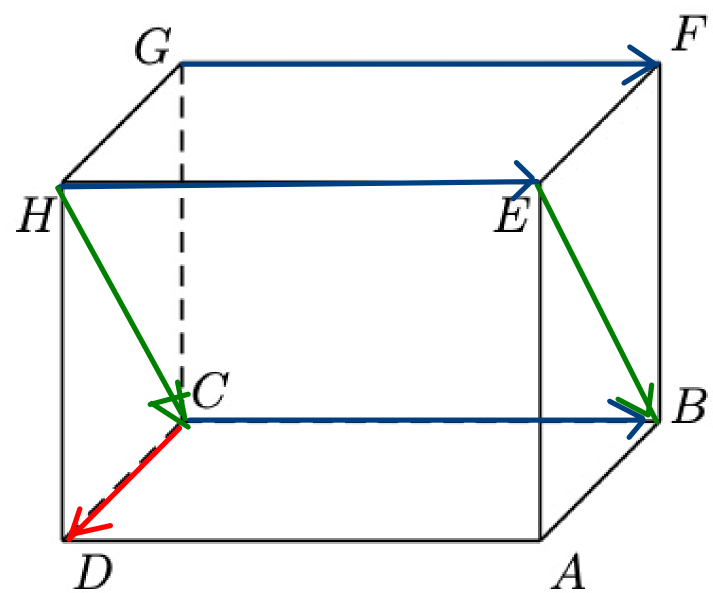
$$\left\{ \begin{aligned} \vec{c} - 2\vec{d} &= -28\vec{e_2} \\ 11\vec{c} + 6\vec{d} &= 28\vec{e_1} \end{aligned} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \vec{e_2} &= \frac{-1}{28}\vec{c} + \frac{2}{28}\vec{d} \\ \vec{e_1} &= \frac{11}{28}\vec{c} + \frac{6}{28}\vec{d} \end{aligned} \right.$$

Dans ①
$$\vec{a} = -\vec{e_1} + \vec{e_2}$$
$$\vec{a} = -\left(\frac{11}{28}\vec{c} + \frac{6}{28}\vec{d}\right) + \left(\frac{-1}{28}\vec{c} + \frac{2}{28}\vec{d}\right)$$
$$= -\frac{11}{28}\vec{c} - \frac{6}{28}\vec{d} - \frac{1}{28}\vec{c} + \frac{2}{28}\vec{d}$$
$$= -\frac{12}{28}\vec{c} - \frac{4}{28}\vec{d} = \frac{-3}{7}\vec{c} - \frac{1}{7}\vec{d}$$

1.2.3 On considère le parallélépipède $ABCD\ EFGH$ représenté sur la figure. Dans chacun des cas suivants, déterminer si les trois vecteurs donnés sont coplanaires. Si tel est le cas, exprimer chacun des trois vecteurs comme combinaison linéaire des deux autres.



a) $\overrightarrow{GH}$, $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{DG}$ oui

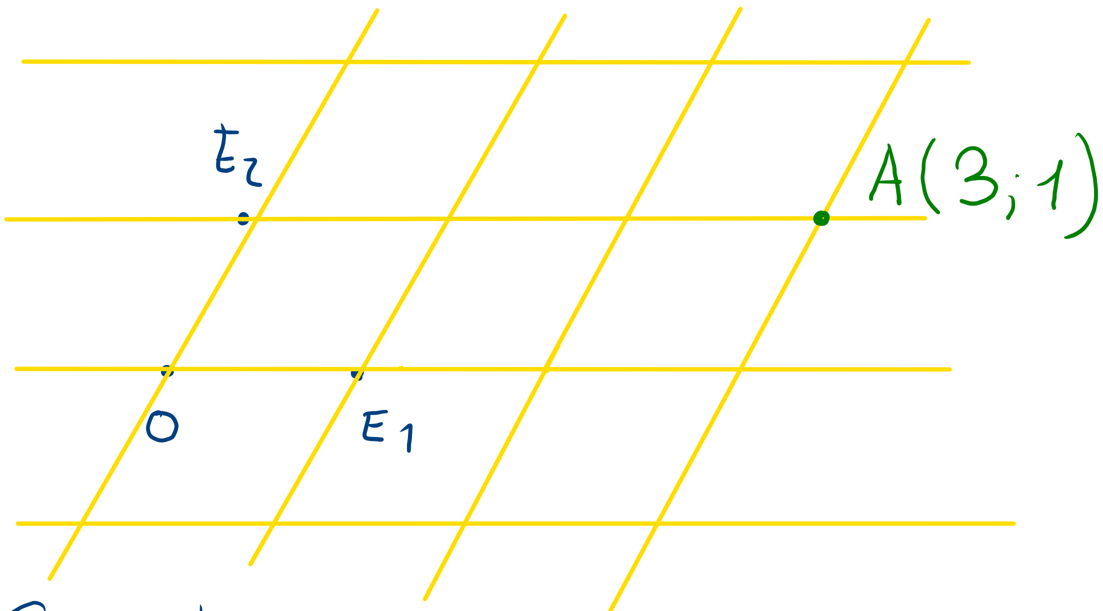


b) $\overrightarrow{GF}$, $\overrightarrow{EB}$ et $\overrightarrow{CD}$ non

$$\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{GH}$$

Bases et repères de V_2

Soit trois points non alignés du plan O, E_1, E_2



Ces trois points définissent un repère $\mathcal{R} = (O, E_1, E_2)$

Dans ce repère, le point A a comme coordonnées $(3;1)$

Dans le repère $\mathcal{R}' = (O, E_2, E_1)$, on a $A(1;3)$.

Le repère est orthonormé si les axes sont perpendiculaires et si E_1 et E_2 sont à égales distance de O