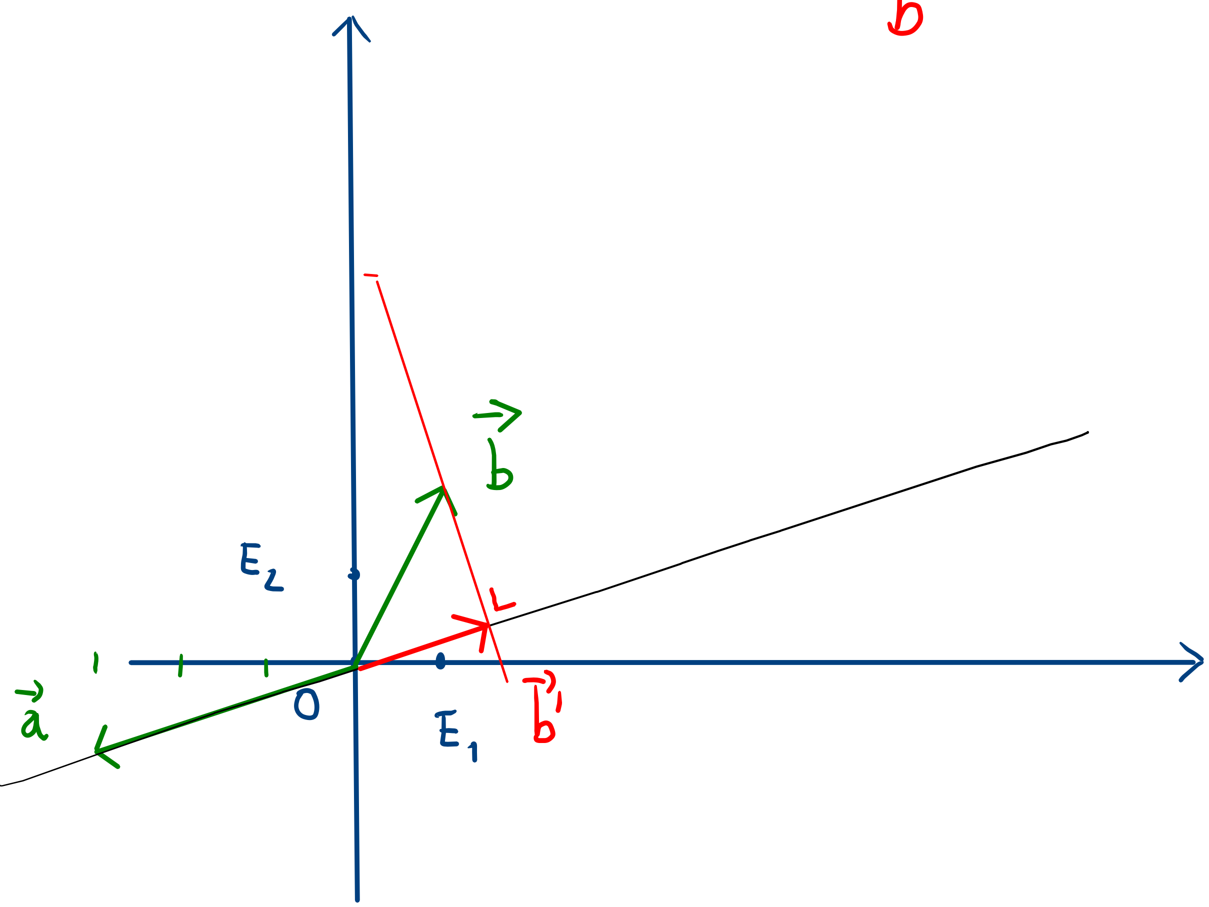
29.10.25

1.4.22 Représenter les vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ sur une figure à l'échelle.

Construire et calculer la projection de $\vec{b}$ sur $\vec{a}$.

$\vec{b}\,'$



$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Par voie graphique :

$$\vec{b}\,' = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$$

Par calcul :

$$\boxed{\vec{b}\,' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\|^2} \vec{a}}$$

Formulaire perso

$$\vec{b}\,' = \frac{-3-2}{10} \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$$

1.4.23 En devoir

1.4.24 Calculer dans chaque cas la longueur de la projection orthogonale de $\vec{a}$ sur $\vec{b}$.

$\vec{a}'$

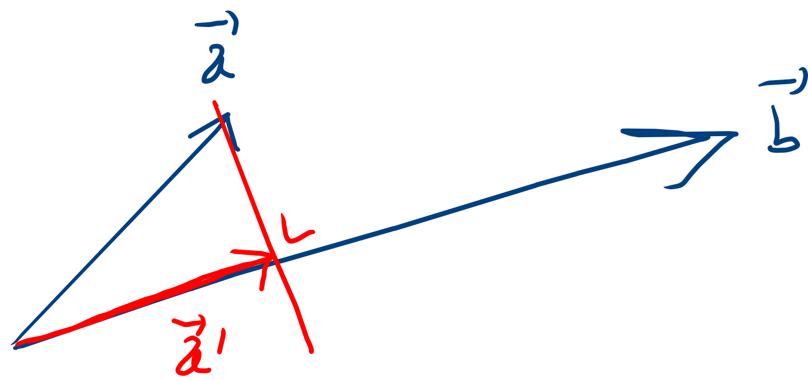
a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} -8 \\ -6 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\vec{a}' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{b}\|^2} \vec{b}$$

$$\|\vec{a}'\| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{\|\vec{b}\|}$$

Formulaire



b) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 + 16 + 0 = 18$

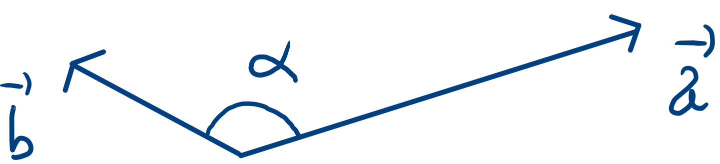
$\|\vec{b}\| = \sqrt{4 + 4 + 9} = \sqrt{17}$

$\|\vec{a}'\| = \frac{18}{\sqrt{17}}$

1.4.26 Indiquer si l'angle formé par les deux vecteurs est aigu, obtus ou droit :

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

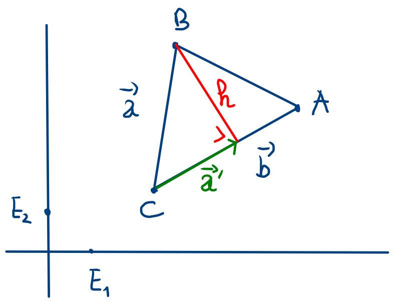
b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$



$$\cos\Big(\underbrace{\measuredangle(\vec{a},\vec{b})}_{\alpha}\Big) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|}$$

Formulaire

Aire d'un triangle



$\vec{CA} = \vec{b}$

$\vec{CB} = \vec{a}$

Aire : $\dfrac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2} = \dfrac{\|\vec{b}\| \cdot h}{2}$

① Projection de $\vec{a}$ sur $\vec{b}$: $\vec{a}' = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{b}\|^2} \vec{b}$

② Calculons h par Pythagore

$$h = \sqrt{\|\vec{a}\|^2 - \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{b}\|}\right)^2} = \sqrt{\frac{\|\vec{a}\|^2 \cdot \|\vec{b}\|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2}{\|\vec{b}\|^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{\|\vec{a}\|^2 \cdot \|\vec{b}\|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2}}{\|\vec{b}\|}$$

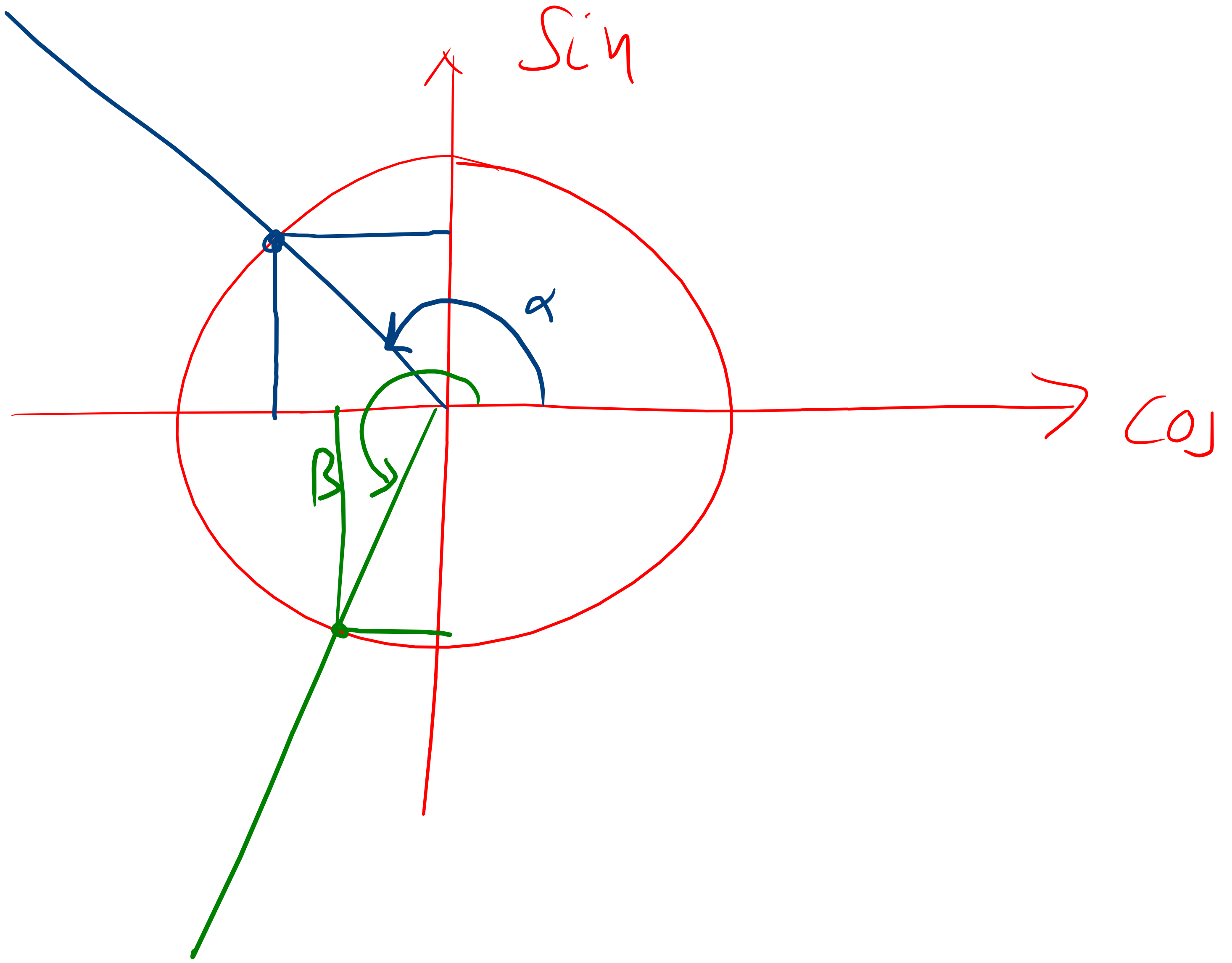
Posons $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$

$$h = \frac{\sqrt{(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2)^2}}{\|\vec{b}\|}$$

$$= \frac{\sqrt{\cancel{a_1^2 b_1^2} + a_2^2 b_1^2 + a_1^2 b_2^2 + \cancel{a_2^2 b_2^2} - \cancel{a_1^2 b_1^2} - 2 a_1 b_1 a_2 b_2 - \cancel{a_2^2 b_2^2}}}{\|\vec{b}\|}$$

$$= \frac{\sqrt{a_1^2 b_2^2 - 2 a_1 b_1 a_2 b_2 + a_2^2 b_1^2}}{\|\vec{b}\|} = \frac{\sqrt{(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2}}{\|\vec{b}\|}$$

Aire du Δ : $\dfrac{1}{2} \left| a_1 b_2 - a_2 b_1 \right|$ Formulaire



sin
cos
α
β