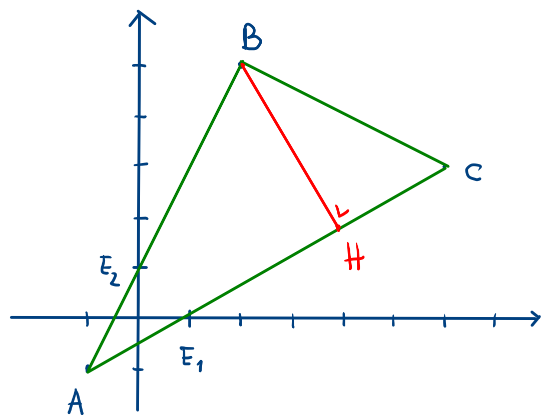
Aire d'un triangle donné par ses sommets

30.10.25



A(−1 ; −1)
B(2 ; 4)
C(6 ; 3)

$$\text{Aire}(\Delta ABC) = \frac{1}{2}\,\|\vec{AC}\|\cdot\|\vec{BH}\| = \frac{1}{2}\cancel{\sqrt{65}}\cdot\frac{23}{\cancel{\sqrt{65}}} = \frac{1}{2}\cdot 23 = 11{,}5$$

① $\vec{AC} = \begin{pmatrix}7\\4\end{pmatrix}$; $\|\vec{AC}\| = \sqrt{65}$

② $\vec{AB} = \begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$; $\|\vec{AB}\| = \sqrt{34}$

③ $\vec{AH} = \frac{41}{65}\cdot\begin{pmatrix}7\\4\end{pmatrix}$; $\|\vec{AH}\| = \frac{41}{65}\cdot\sqrt{65} = \frac{41\sqrt{65}}{65}$

④ $\|\vec{BH}\|^2 = \|\vec{AB}\|^2 - \|\vec{AH}\|^2 =$

$$= 34 - \frac{41^2\cdot\cancel{65}}{65^{\cancel{2}}} = 34 - \frac{41^2}{65} = \frac{34\cdot 65 - 41^2}{65} = \frac{529}{65} = \frac{23^2}{65}$$

$$\Rightarrow \|\vec{BH}\| = \frac{23}{\sqrt{65}}$$

Avec la formule : $\vec{AC} = \begin{pmatrix}7\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{AB} = \begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$

$$\text{Aire}(\Delta ABC) = \frac{1}{2}\left|7\cdot 5 - 3\cdot 4\right| = \frac{1}{2}\cdot 23 = 11{,}5$$

$$\text{Aire}(\Delta ABC) = \frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix}7 & 3\\4 & 5\end{pmatrix}\right| = \frac{23}{2}$$

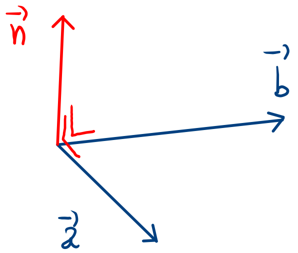
$$\boxed{\det\begin{pmatrix}a & c\\b & d\end{pmatrix} = ad - bc}$$

Produit vectoriel

Nous nous plaçons dans V_3.

Soit $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$.

On cherche $\vec{n}$ tel que $\vec{n} \perp \vec{a}$ et $\vec{n} \perp \vec{b}$.



On construit un vecteur $\vec{n} = \underbrace{\vec{a} \times \vec{b}}_{\text{produit vectoriel de } \vec{a} \text{ et } \vec{b}} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$

<u>Exemple</u> : $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} = \vec{n}$

$\vec{n} \cdot \vec{a} = 0$

$\vec{n} \cdot \vec{b} = 0$ $\Rightarrow$ $\vec{n} \perp \vec{a}$ et $\vec{n} \perp \vec{b}$

Le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal au plan vectoriel engendré par $\vec{a}$ et $\vec{b}$

1.5.1 les 3 premiers