Nombre, divisibilité et congruence – TE 851A

Problème	1	2	3	4	5	Total
Points	5	5	5	4	9	28
Points obtenus						

Problème 1 (5 points)
Montrer que si $a \equiv b \pmod{n}$, alors $a^2 \equiv b^2 \pmod{n}$.

$a \equiv b \pmod{n} \Rightarrow n \mid (a-b) \Rightarrow \exists K \in \mathbb{Z}$ tel que

$a - b = Kn.$

$a^2 - b^2 \equiv (a-b)(a+b) \equiv Kn \cdot (a+b) \equiv 0 \pmod{n}$

puisque $n \mid Kn$.

Donc $a^2 - b^2 \equiv 0 \pmod{n} \Leftrightarrow a^2 \equiv b^2 \pmod{n}$

Problème 2 (5 points)
Montrer qu'il n'existe aucun entier n tel que $n^2 \equiv 2 \pmod 4$.

1°) n est pair, il existe $K \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2K$.

$n^2 \equiv (2K)^2 \equiv 4K^2 \equiv 0 \pmod 4$

2°) n est impair, il existe $K \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2K+1$.

$n^2 \equiv (2K+1)^2 = 4K^2 + 4K + 1 \equiv 1 \pmod 4$

Donc $n^2 \equiv 0$ ou $n^2 \equiv 1 \pmod 4$.

Donc $n^2 \equiv 2 \pmod 4$ n'est pas possible.

Problème 3 (5 points)
Soit n un entier positif. Soit a, b, c et d des entiers quelconques.

Supposons que $a \equiv c \pmod{n}$ et $b \equiv d \pmod{n}$. Montrer que $a \cdot b \equiv c \cdot d \pmod{n}$.

$a \equiv c \pmod{n} \Rightarrow n \mid a-c \Rightarrow \exists\, z_1 \in \mathbb{Z}$ tq $z_1 n = a-c$

$b \equiv d \pmod{n} \Rightarrow n \mid b-d \Rightarrow \exists\, z_2 \in \mathbb{Z}$ tq $z_2 n = b-d$

$$ab - cd = ab - ad + ad - cd = a(b-d) + d(a-c)$$
$$= a z_2 n + d z_1 n = (a z_2 + d z_1) n.$$

Posons $a z_2 n + d z_1 n = z$. On a $zn = ab - cd$.

Donc $n \mid (ab-cd)$ et ainsi $\underline{ab \equiv cd \pmod{n}}$.

Problème 4 (4 points)
Trouver une série de 15 nombres entiers consécutifs dont aucun n'est premier.

1 $16! + 2$ divisible par 2
2 $16! + 3$ par 3
3 $16! + 4$ par 4
$\vdots$ $\vdots$
14 $16! + 15$ par 15
15 $16! + 16$ par 16

Posons $N = 16! + 2$.
Les nombres $N, N+1, \dots, N+15$ ne sont pas premiers.

Problème 5 (points)

a) Trouver le reste de la division par 5 du nombre 17839^{33}.

b) Calculer $N = 1999 \cdot 2010 \cdot 2013 \cdot 2025 \pmod{2026}$

c) Résoudre $6\,x \equiv 8 \pmod{10}$

a) $17839 \equiv 4 \pmod 5$

$4^{33} \equiv 4^{32} \cdot 4 \pmod 5$

$4^2 \equiv 16 \equiv 1 \pmod 5$

$4^4 \equiv 1^2 \equiv 1 \pmod 5$

$4^{32} \cdot 4 \equiv 4 \pmod 5$

$\underline{17839^{33} \equiv 4 \pmod 5}$

b) $\underline{1999 \cdot 2010 \cdot 2013 \cdot 2025 \equiv 1564 \pmod{2026}}$

$\equiv (-27) \cdot (-16) \cdot (-13) \cdot (-1) \equiv 5616$

c) $6x \equiv 8 \pmod{10}$ $\Big\downarrow \div 2$

$3x \equiv 4 \pmod{5}$

$\Rightarrow 3 \cdot 2\, x \equiv 4 \cdot 2 \pmod{5}$

$x \equiv 3 \pmod{5}$

Donc les solutions:

$x \equiv 3$ ou $x \equiv 8 \pmod{10}$