

Ensembles de nombres

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

Le nombre d'éléments de $\mathbb{N}$: $\text{card}(\mathbb{N}) = \aleph_0$ (aleph zéro)

$$\text{card}(\mathbb{Z}) = \aleph_0$$

où card signifie cardinal, ie le nombre d'éléments
c-a-d

On a aussi $\text{card}(\mathbb{Q}) = \aleph_0$

Par contre $\text{card}(\mathbb{R}) = c$ puissance du continu.

$$\text{On a } \aleph_0 < c.$$

$$\text{On note } \mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$$

Les nombres premiers

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. p est premier s'il admet exactement deux diviseurs.

Crible d'Ératosthène

3.1.1 (Le crible d'Ératosthène)

Dans le tableau ci-dessous, souligner 2, puis biffer tous les multiples de 2. Le premier nombre non biffé est 3. Il est premier, on le souligne et on biffe tous ses multiples. Etc.

Arrivé à 10, tous les nombres non biffés sont premiers.

Reproduire cette méthode dans le tableau ci-dessous.

	<u>2</u>	<u>3</u>	4	<u>5</u>	6	<u>7</u>	8	9	10
<u>11</u>	12	<u>13</u>	14	15	16	<u>17</u>	18	<u>19</u>	20
21	22	<u>23</u>	24	25	26	27	28	<u>29</u>	30
<u>31</u>	32	33	34	35	36	<u>37</u>	38	39	40
<u>41</u>	42	<u>43</u>	44	45	46	<u>47</u>	48	49	50
51	52	<u>53</u>	54	55	56	57	58	<u>59</u>	60
<u>61</u>	62	63	64	65	66	<u>67</u>	68	69	70
<u>71</u>	72	<u>73</u>	74	75	76	77	78	<u>79</u>	80
81	82	<u>83</u>	84	85	86	87	88	<u>89</u>	90
91	92	<u>93</u>	94	95	96	<u>97</u>	98	99	100

$\left\{ 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, \right.$
 $\left. 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97 \right\}$

$$100 = 2^2 \cdot 5^2$$

3.1.2

- a) Parmi les nombres 1999, 2999, ~~3999~~ et 4999, déterminer avec une calculatrice ceux qui sont premiers.

Si un nombre n'est pas premier, on dit qu'il est composé!

- b) Un nombre de Fermat est un nombre qui peut s'écrire sous la forme $F_n = 2^{2^n} + 1$, avec n un entier naturel non nul.

Calculer F_2 , F_3 et F_4 , puis déterminer avec une calculatrice ceux qui sont premiers.

$$F_1 = 2^2 + 1 = 5 \quad \text{qui est premier}$$

$$F_2 = 2^{2^2} + 1 = 2^4 + 1 = 17 \quad \text{qui est premier}$$

$$F_3 = 2^{2^3} + 1 = 257 \quad \text{qui est premier}$$

$$F_4 = 2^{2^4} + 1 = 2^{16} + 1 = 65537 \quad \text{qui est premier}$$

$$F_5 = \quad \text{à voir}$$

3.1.3 Démontrer que tout nombre naturel n , distinct de 0 et de 1, admet au moins un facteur premier.

Soit $n = 2, 3, \dots$

- 1) Si n est premier, alors le résultat est démontré
- 2) Si n n'est pas premier, l'ensemble de ses diviseurs d de n , tel que $2 \leq d < n$ n'est pas vide. Il admet un plus petit élément p .

Si p n'est pas premier, il admettrait un diviseur p' qui diviserait p et donc d . Cela contredit que p est le plus petit diviseur de n . Donc p est premier.

Corollaire

$$n = p \times q \quad , \quad \text{avec } p \leq q \quad , \quad n, p, q \in \mathbb{N}^* - \{1\}$$

$$p \leq q$$

$$p^2 \leq pq$$

$$p^2 \leq n$$

$$\Rightarrow \boxed{p \leq \sqrt{n}}$$

Exemple

: $n = 117$

$$p \mid n \quad \text{alors} \quad 2 \leq p \leq \sqrt{117}$$

3.1.4 Démontrer que l'ensemble des nombres premiers est infini.

Supposons que l'ensemble des nombres premiers est fini $P = \{p_1, p_2, p_3, \dots, p_n\}$ avec $p_i \neq p_j, i \neq j$

Soit $N = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n + 1$

- 1) Si N est premier, $N \notin P$. Ce qui est absurde
- 2) Si N n'est pas premier. Il existe un nombre premier d qui divise N . $d \notin P$, car le reste de la division de N par d donne 1. Ce qui est aussi absurde.

c) Écrire en python une fonction `isPrime(n)` qui détermine si le nombre entier n est premier.

```
from math import sqrt
```

```
def isPrime(n):
```

```
    if n == 1:
```

```
        return False
```

```
    else:
```

```
        N = int(sqrt(n)) + 1
```

```
        for K in range(2; N):
```

```
            if n % K == 0:
```

```
                return False
```

```
    return True
```

%

$11 \% 5 \rightarrow 2$

sqrt

122

3.1.10 On pose $\alpha = 101! + 1$. Montrer que les 100 nombres consécutifs

$$\alpha + 1, \alpha + 2, \dots, \alpha + 100$$

ne sont pas premiers.

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 & , n \geq 1 \end{cases}$$

$$6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$$

Les 100 nombres :

$$\begin{aligned} \alpha + 1 &= 101! + 2 = (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 101) + 2 = 2 \left((1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 101) + 1 \right) \\ \alpha + 2 &= 101! + 3 = (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 101) + 3 = 3 \left((1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 101) + 1 \right) \\ \alpha + 3 &= 101! + 4 \\ &\vdots \\ \alpha + 100 &= 101! + 101 = (1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 100 \cdot 101) + 101 = 101 \cdot (100! + 1) \end{aligned}$$

3.1.9 (La répartition des nombres premiers)

Soit n un entier naturel non nul.

Démontrer qu'il existe un intervalle de taille n sans aucun nombre premier.

$$N = (n+1)! + 1$$

Les n nombres :

$$N+1, \dots, N+n$$

ne sont pas premiers

3.2.8 Effectuer la division en colonnes, avec reste.

- a) $13 \div 5$ 3
- c) $24 \div 13$ 11
- e) $100 \div 17$ 15
- g) $45 \div 8$ 5
- b) $25 \div 8$ 1
- d) $10 \div 3$ 1
- f) $26 \div 17$ 9
- h) $50 \div 10$ 0

3.1.6 Soit p, q deux nombres premiers distincts. Quels sont les diviseurs positifs de $p^2 q$?

$\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$

$\overline{7} = \overline{4} = \overline{1}$
 $\overline{2} = \overline{2}$
 $\overline{4} + \overline{2} = \overline{6} = \overline{0}$
 $\overline{1} + \overline{2} = \overline{3} = \overline{0}$

Table d'addition :

+	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$

17 modulo 5 $\leftrightarrow$ reste de la division de 17 par 5

De même, faisons la table d'addition de $\mathbb{Z}_6$

$\mathbb{Z}_6 = \{ \overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5} \}$

$\mathbb{Z}_6$	+	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	0	1	2	3	4	5
$\overline{1}$	$\overline{1}$	1	2	3	4	5	0
$\overline{2}$	$\overline{2}$	2	3	4	5	0	1
$\overline{3}$	$\overline{3}$	3	4	5	0	1	2
$\overline{4}$	$\overline{4}$	4	5	0	1	2	3
$\overline{5}$	$\overline{5}$	5	0	1	2	3	4

Cesar $0 \rightarrow 2$
 $A \rightarrow C$

$\mathbb{Z}_{26}$ $\begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \\ A & B & C & D & E \end{matrix}$ $\begin{matrix} 25 \\ Z \end{matrix}$