Mathématiques renforcées – 2e année

Corrigé détaillé avec barème

Exercice 1 : Nombres complexes (8 points)

On considère

$$z = -1 + i\sqrt{3}$$

1. Forme trigonométrique (3 pts)

Calcul du module :

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2}$$

$$= \sqrt{4} = 2$$

(1 pt)
Détermination de l'argument :

$$\cos\theta = -\frac{1}{2}, \qquad \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Donc

$$\theta = \frac{2\pi}{3}$$

(1 pt)
Ainsi

$$z = 2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

(1 pt)

2. Calcul de z^5 (3 pts)

Par la formule de Moivre :

$$z^5 = 2^5\left(\cos\left(\frac{10\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{10\pi}{3}\right)\right)$$

(1 pt)
Réduction :

$$\frac{10\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$$

(1 pt)
Donc

$$z^5 = 32\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$= -16 - 16\sqrt{3}\,i$$

(1 pt)

3. Résolution de $w^3 = 8$ (2 pts)

$$8 = 8e^{i0}$$

Les solutions :

$$w_k = 2e^{i\frac{2k\pi}{3}}$$

avec

$$k = 0, 1, 2$$

(1 pt)
Solutions :

$$w_1 = 2$$

$$w_2 = -1 + i\sqrt{3}$$

$$w_3 = -1 - i\sqrt{3}$$

(1 pt)
Total : 8 pts

Exercice 2 : Limites et asymptotes (10 points)

$$f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 1}{x - 2}$$

1. Domaine (1 pt)

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

(1 pt)

2. Limites (3 pts)

Factorisation :

$$2x^2 - 3x + 1 = (2x - 1)(x - 1)$$

Au voisinage de 2 :
numérateur positif.
Pour

$$x \to 2^-$$

dénominateur négatif :

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$$

(1.5 pts)
Pour

$$x \to 2^+$$

dénominateur positif :

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$$

(1.5 pts)

3. Asymptotes (4 pts)

Division polynomiale :

$$\frac{2x^2 - 3x + 1}{x - 2} = 2x + 1 + \frac{3}{x - 2}$$

(3 pts)
Donc :
Asymptote verticale :

$$x = 2$$

Asymptote oblique :

$$y = 2x + 1$$

(1 pt)

4. Interprétation (2 pts)

La courbe se rapproche de

$$x = 2$$

et de

$$y = 2x + 1$$

pour les grandes valeurs de x.
(2 pts)
Total : 10 pts

Exercice 3 : Dérivées et étude de fonction (12 points)

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$$

1. Dérivée (2 pts)

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

(2 pts)

2. Points critiques (3 pts)

$$3x^2 - 12x + 9 = 0$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$(x - 1)(x - 3) = 0$$

$$x = 1 \qquad x = 3$$

(3 pts)

3. Variations (4 pts)

Signe :

$$f' > 0$$

sur

$$] - \infty, 1[\cup]3, +\infty[$$

$$f' < 0$$

sur

$$]1, 3[$$

Tableau correct : (4 pts)

4. Extrema (3 pts)

$$f(1) = 5$$

$$f(3) = 1$$

Maximum local :

$$(1, 5)$$

(1.5 pts)
Minimum local :

$$(3, 1)$$

(1.5 pts)
Total : 12 pts

Exercice 4 : Géométrie analytique (10 points)

$$A(1, 2)$$

$$B(5, 4)$$

$$C(3, -2)$$

1. Équation de (AB) (3 pts)

Pente :

$$m = \frac{4-2}{5-1} = \frac{1}{2}$$

(1 pt)
Équation :

$$y - 2 = \frac{1}{2}(x - 1)$$

(1 pt)
Sous forme cartésienne :

$$x - 2y + 3 = 0$$

(1 pt)

2. Médiatrice (3 pts)

Milieu :

$$M(3, 3)$$

(1 pt)
Pente perpendiculaire :

$$-2$$

(1 pt)
Équation :

$$y - 3 = -2(x - 3)$$

$$2x + y - 9 = 0$$

(1 pt)

3. Distance (4 pts)

Formule :

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

(2 pts)
Application :

$$d = \frac{|3 + 4 + 3|}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$$

(2 pts)
Total : 10 pts

Exercice 5 : Exponentielles et logarithmes (10 points)

1. Résolution (4 pts)

Posons

$$u = e^x$$

$$u^2 - 5u + 6 = 0$$

$$(u - 2)(u - 3) = 0$$

(2 pts)
Donc

$$e^x = 2$$

ou

$$e^x = 3$$

$$x = \ln 2$$

ou

$$x = \ln 3$$

(2 pts)

2. Logarithmes (4 pts)

$$\ln((x+1)(x-2)) = \ln(12)$$

(2 pts)

$$x^2 - x - 14 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{57}}{2}$$

Condition :

$$x > 2$$

(1 pt)
Solution :

$$x = \frac{1 + \sqrt{57}}{2}$$

(1 pt)

3. Croissance exponentielle (2 pts)

$$3000 = 500e^{0.3t}$$

$$6 = e^{0.3t}$$

$$t = \frac{\ln 6}{0.3}$$

$$t \approx 5.97$$

Donc environ

$$6$$

heures.
(2 pts)

$$\boxed{Total = 50\ points}$$