Méthode des accroissements

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a}$$

Problème 1

Calculer, à l'aide de la méthode des accroissements, la dérivée des fonctions suivantes.

a) $f(x) = \dfrac{x+2}{x-3}$ b) $g(x) = 6x^2 + x - \sqrt{3}$ c) $h(x) = x^2 - \sqrt{x}$

a) $$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{\frac{x+2}{x-3} - \frac{a+2}{a-3}}{x-a} = \lim_{x \to a} \frac{(x+2)(a-3) - (x-3)(a+2)}{(x-a)(x-3)(a-3)}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{(xa + 2a - 3x - 6) - (xa + 2x - 3a - 6)}{(x-a)(x-3)(a-3)}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{5a - 5x}{(x-a)(x-3)(a-3)} = \lim_{x \to a} \frac{-5\cancel{(x-a)}}{\cancel{(x-a)}(x-3)(a-3)} =$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{-5}{(a-3)^2} \Rightarrow \boxed{f'(x) = \frac{-5}{(x-3)^2}}$$

b) $$g'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{\left[6(a+h)^2 + (a+h) - \sqrt{3}\right] - \left[6a^2 + a - \sqrt{3}\right]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{6a^2} + 12ah + h^2 \cancel{+ a} + h \cancel{- \sqrt{3}} \cancel{- 6a^2} \cancel{- a} \cancel{+ \sqrt{3}}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(12a + h + 1)}{\cancel{h}} = 12a + 1$$

$$\Rightarrow \boxed{g'(x) = 12x + 1}$$

c) $h(x) = x^2 - \sqrt{x}$

$$h'(a) = \lim_{x \to a} \frac{(x^2 - \sqrt{x}) - (a^2 - \sqrt{a})}{x - a}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} - \lim_{x \to a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a}$$

Ici, on amplifie par le conjugué

$$= \lim_{x \to a} \frac{\cancel{(x-a)}(x+a)}{\cancel{x-a}} - \lim_{x - a} \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} + \sqrt{a})}{(x-a)(\sqrt{x} + \sqrt{a})}$$

$$= 2a - \lim_{x \to a} \frac{\cancel{x-a}}{\cancel{(x-a)}(\sqrt{x} + \sqrt{a})}$$

$$= 2a - \frac{1}{2\sqrt{a}} \quad \Rightarrow \quad h'(x) = 2x - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Problème 2

a) $f'(x) = 4 \sin^3\left(\frac{x}{x+2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x}{x+2}\right) \frac{2}{(x+2)^2}$

$$\left(\frac{x}{x+2}\right)' = \frac{x + 2 - x}{(x+2)^2} = \frac{2}{(x+2)^2}$$

$$f'(x) = 8\,\frac{\sin^3\left(\frac{x}{x+2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x}{x+2}\right)}{(x+2)^2}$$

b) $$\left(\frac{x-5}{\sqrt{x}}\right)' = \frac{\sqrt{x}-(x-5)\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{2x-x+5}{2x\sqrt{x}} = \frac{x+5}{2x\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = 3\left(\frac{x-5}{\sqrt{x}}\right)^2\cdot\frac{x+5}{2x\sqrt{x}} = 3\,\frac{(x-5)^2(x+5)}{2x^2\sqrt{x}}$$

c) $$f'(x) = \cos\left(\cos(\pi x)\right)\cdot\left(-\sin(\pi x)\right)\cdot\pi$$

$$= -\pi\sin(\pi x)\cdot\cos(\cos(\pi x))$$

d) $u = \cos(x)$; $u' = -\sin(x)$

$v = \sin^2(x)$; $v' = 2\sin(x)\cos(x)$

$$f'(x) = \frac{-\sin(x)\cdot\sin^2(x) - \cos(x)\cdot 2\sin(x)\cos(x)}{\sin^4(x)}$$

$$= \frac{-\sin^3(x) - 2\sin(x)\cos^2(x)}{\sin^4(x)} = \frac{-\sin^2(x) - 2\cos^2(x)}{\sin^3(x)}$$

Problème 3

$u = x+3$; $u' = 1$

$v = x^2+1$; $v' = 2x$

$$f'(x) = \frac{x^2+1-(x+3)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1-2x^2-6x}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{-x^2-6x+1}{(x^2+1)^2}$$

1°) La pente de la tangente : $f'(1) = \frac{-1-6+1}{4} = \frac{-3}{2}$

2°) La tangente en $T(1;2)$:

$$y = \frac{-3}{2}x + h$$

par T: $2 = -\frac{3}{2}\cdot 1 + h \Rightarrow h = 2 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2}$

$$\boxed{y = \frac{-3}{2}x + \frac{7}{2}}$$

Problème 4

$u = x^2 - 1$; $u' = 2x$

$v = (x-2)^2$; $v' = 2(x-2)$

$$f'(x) = \frac{2x(x-2)^2 - (x^2-1)\cdot 2(x-2)}{(x-2)^4}$$

$$= \frac{2\cancel{(x-2)}\left[x(x-2)-(x^2-1)\right]}{(x-2)^{\cancel{4}\,3}} = \frac{2(-2x+1)}{(x-2)^3}$$

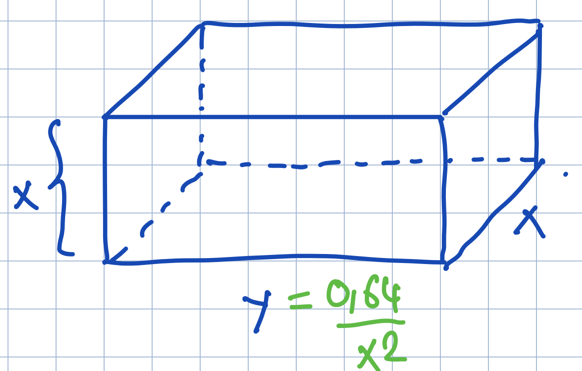
Tableau de la croissance avec les contraintes $0 < x < 8$:

x		0		$\frac{1}{2}$		2		8	
$f'(x)$			$-$	0	$+$	‖	$-$		
$f(x)$		‖	↘	min	↗	‖	↘	‖	

$$f\left(\tfrac{1}{2}\right) = \frac{1/4 - 1}{(1/2 - 2)^2} = \frac{-3/4}{9/4} = \frac{-1}{3} \quad ; \text{ min : } \left(\tfrac{1}{2} \,;\, -\tfrac{1}{3}\right)$$

Le problème présente un minimum lorsque $x = \frac{1}{2}$.

Problème 5



Volume : $x \cdot y \cdot x = 0{,}64$

$$x^2 y = 0{,}64$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{0{,}64}{x^2}, \qquad x > 0$$

prix : $$f(x) = 20 \cdot x \cdot \frac{0{,}64}{x^2} + 2 \cdot 10 \cdot \left[x^2 + x \cdot \frac{0{,}64}{x^2}\right]$$

$$= \frac{12{,}8}{x} + 20x^2 + \frac{12{,}8}{x} = \frac{20x^3 + 25{,}6}{x}$$

avec $x > 0$

Tableau de la croissance de f :

$$f'(x) = \frac{60x^2 \cdot x - (20x^3 + 25,6)}{x^2} = \frac{40x^3 - 25,6}{x^2}$$

$$f'(x) = 40\,\frac{x^3 - 0,64}{x^2}$$

$$x^3 = 0,64 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{0,64} \cong 0,862 \text{ [m]}$$

x		0		$0,862$	
$f'(x)$	///	‖	$-$	0	$+$
$f(x)$	///	‖	↘	min	↗

- Les dimensions de la boîte :

$$y = \frac{0,64}{(0,64^{1/3})^2} = 0,64^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{0,64} = x$$

La boîte est un cube de côté $\sqrt[3]{0,64}$.

- Le prix :

$$f(\sqrt[3]{0,64}) = \frac{20 \cdot 0,64 + 25,6}{(\sqrt[3]{0,64})^3} = \frac{38,4}{0,862} = 44,56 \text{ [CHF]}$$