Série 2 – Fonctions

Exercice 1

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 3x + 1$.

a) Démontrer que f est bijective.

a) injective : Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $f(a) = f(b)$.

Alors : $3a + 1 = 3b + 1 \Leftrightarrow 3a = 3b \Leftrightarrow a = b$

surjective : Soit $y \in \mathbb{R}$. Il faut déterminer $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) = y$

Alors $3a + 1 = y \Leftrightarrow 3a = y - 1 \Leftrightarrow a = \frac{y-1}{3} = \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}$.

On a bien $f\left(\frac{1}{3}y - \frac{1}{3}\right) = 3\left(\frac{1}{3}y - \frac{1}{3}\right) + 1 = y - 1 + 1 = y$

Comme f est injective et surjective, elle est bijective.

b) Déterminer la fonction réciproque ${}^{r}f$ de f.

$$ {}^{r}f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{1}{3}x - \frac{1}{3} $$

Exercice 2

L'application $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $n \mapsto 3n + 1$ est-elle injective ? surjective ? bijective ?

Injective : Soit $a, b \in \mathbb{Z}$ tel que $f(a) = f(b)$.

Alors $3a + 1 = 3b + 1 \Leftrightarrow 3a = 3b \Leftrightarrow a = b$.

Ainsi f est injective.

Surjective : Soit $a \in \mathbb{Z}$ tel que $f(a) = 2$.

Alors $3a + 1 = 2 \Leftrightarrow 3a = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{3} \notin \mathbb{Z}$

Donc f n'est pas surjective.

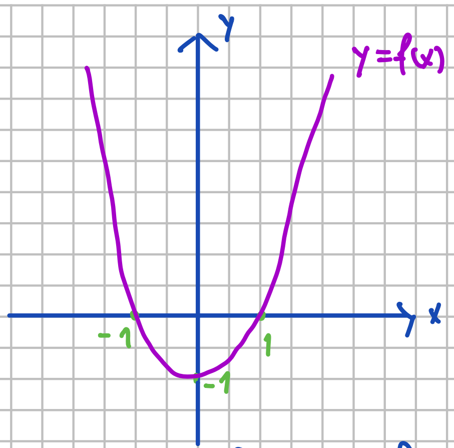
Comme f n'est pas surjective, elle n'est pas bijective.

Exercice 3

Soit la fonction $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$, $x \mapsto x^2 - 1$.

Déterminer $A \subset \mathbb{R}$ et $B \subset \mathbb{R}$ pour que f soit bijective.

Donner ensuite ${}^r f$.



$f(x) = x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$

$A = \mathbb{R}_+$

$B = [-1; +\infty[$

Soit $y \in [-1; +\infty[$. Trouvons $x \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(x) = y$.

Donc
$$
\begin{aligned}
x^2 - 1 &= y & &\mid +1 \\
x^2 &= y + 1 & &\mid \sqrt{\ }, \text{ car } y+1 \geq 0 \\
x &= \sqrt{y+1}
\end{aligned}
$$

Donc
$$
\boxed{{}^r f : [-1; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_+, \quad x \longmapsto \sqrt{x+1}}
$$

Exercice 4

Soit la fonction $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$, $x \mapsto \dfrac{x+1}{x+2}$.
Déterminer $A \subset \mathbb{R}$ et $B \subset \mathbb{R}$ pour que f soit bijective.
Donner ensuite ${}^r f$.

Prenons $A = \mathbb{R} - \{-2\}$.

Soit $x_1, x_2 \in A$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$.

Alors $\dfrac{x_1+1}{x_1+2} = \dfrac{x_2+1}{x_2+2}$

$$\Rightarrow (x_1+1)(x_2+2) = (x_2+1)(x_1+2)$$

$$x_1x_2 + 2x_1 + x_2 + 2 = x_1x_2 + 2x_2 + x_1 + 2$$

$$x_1 = x_2$$

Nous avons démontré que f est injective.

Soit $y \in B$. Soit $x \in \mathbb{R} - \{-2\}$ tel que $f(x) = y$.

$$\frac{x+1}{x+2} = y \Leftrightarrow x+1 = y(x+2) \Leftrightarrow x+1 = yx+2y$$

$$\Leftrightarrow yx - x = -2y+1 \Leftrightarrow x(y-1) = -2y+1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2y+1}{y-1}.$$ Ainsi $B = \mathbb{R} - \{1\}$

$$\boxed{\begin{aligned} {}^r f : \mathbb{R} - \{1\} &\longrightarrow \mathbb{R} - \{-2\} \\ x &\longmapsto \frac{-2x+1}{x-1} \end{aligned}}$$

Exemple : $f(4) = \dfrac{5}{6}$

$${}^r f\left(\frac{5}{6}\right) = \frac{-\frac{10}{6}+1}{\frac{5}{6}-1} = \frac{-\frac{4}{6}}{-\frac{1}{6}} = -\frac{4}{6} \cdot \frac{6}{-1} = 4$$