

Les nombres complexes – TE 838A

Problème	1	2	3	4	5	Total
Points	8	9	8	5	8	38
Points obtenus						

Problème 1 (8 points)Écrire les nombres complexes ci-dessous sous la forme $a + bi$:

a) $w_1 = (1 + 4i)(1 - 4i)$

c) $w_3 = i^{323}$

b) $w_2 = \frac{1}{1 + 2i} + \frac{1}{1 - 2i}$

d) $w_4 = \left[4; \frac{\pi}{3}\right]$

a) $w_1 = 1 - 16i^2 = \underline{17}$

b) $w_2 = \frac{1 - 2i + 1 + 2i}{1 - 4i^2} = \underline{\frac{2}{5}}$

c) $w_3 = i^{323} = (i^4)^{80} \cdot i^3 = \underline{-i}$

$$d) w_4 = 4 \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right)$$

$$= 4 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \underline{2 + 2\sqrt{3}i}$$

Problème 2 (9 points)

Soit $z_1 = 3 - 4i$ et $z_2 = -2 + i$.

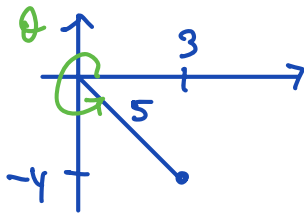
a) Calculer et donner sous forme algébrique $w_1 = -i \cdot z_1 + (2 + i) \cdot z_2$.

b) Calculer et donner sous forme trigonométrique $w_2 = z_1^{10}$.

c) Calculer et donner sous forme algébrique $w_3 = \frac{z_1}{z_2}$.

$$a) w_1 = -3i - 4 + (2 + i)(-2 + i) = -3i - 4 - 5 = \underline{-9 - 3i}$$

$$b) z_1 = [5; \theta] ; \underline{w_2 = [5^{10}; 188,7^\circ]}$$



$$\cos \theta = \frac{3}{5} \Rightarrow \theta \approx 306,87^\circ$$

$$10\theta \approx 3068,7^\circ = 188,7^\circ + 8 \cdot 360^\circ$$

$$c) w_3 = \frac{3-4i}{-2+i} \cdot \frac{-2-i}{-2-i} = \frac{-6 - 3i + 8i - 4}{5} = \frac{-10 + 5i}{5} \\ = \underline{-2 + i}$$

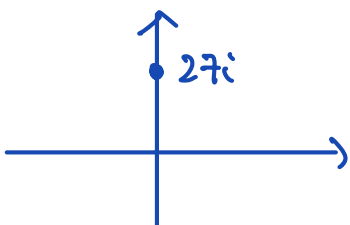
Problème 3 (8 points)

Soit l'équation complexe

$$z^3 = 27i$$

- a) Déterminer sous forme **trigonométrique** les solutions de cette équation.
- b) Déterminer sous forme **algébrique** les solutions de cette équation.
- c) ↪ page suivante.

2)


$$27i = \left[3^3; \frac{\pi}{2} \right]$$

$$z = [r, \theta] \Rightarrow z^3 = [r^3; 3\theta]$$

① $r^3 = 3^3 \Rightarrow r = 3$

② $3\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6} + k \frac{2\pi}{3}$

$$z_0 = \left[3; \frac{\pi}{6} \right]$$

$$z_1 = \left[3; \frac{5\pi}{6} \right]$$

$$z_2 = \left[3; \frac{3\pi}{2} \right]$$

$$\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

$$\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + \frac{8\pi}{6} = \frac{9\pi}{6} = \frac{3\pi}{2}$$

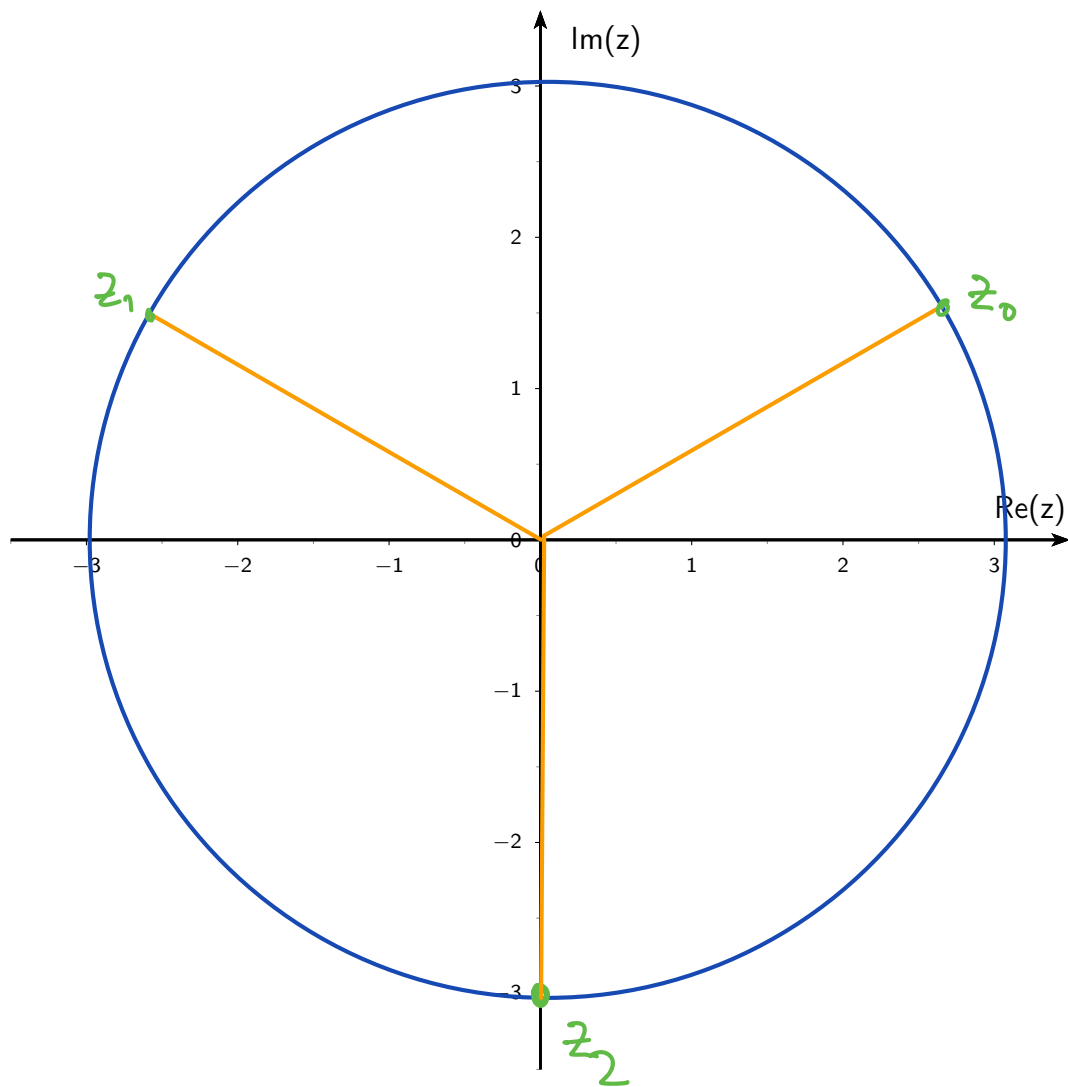
b) $z_0 = 3 \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)i \right) = 3 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = \underline{\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i}$

$$z_1 = 3 \left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)i \right) = 3 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = \underline{-\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i}$$

$$z_2 = 3 \left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)i \right) = \underline{-3i}$$

c) Représenter dans le plan complexe les solutions de cette équation.

$$z_0 = [3; 30^\circ] ; \quad z_1 = [3; 150^\circ] ; \quad z_2 = [3; 270^\circ]$$



Problème 4 (5 points)Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation ci-dessous :

$$z^2 + iz + 1 - 3i = 0$$

et donner les solutions sous la forme $a + bi$.

$$a = 1 ; \quad b = i ; \quad c = 1 - 3i$$

$$\bullet \quad \Delta = i^2 - 4(1 - 3i) = -1 - 4 + 12i = -5 + 12i$$

On calcule les racines carrées $a + bi$ de Δ

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -5 \\ a^2 + b^2 = 13 \\ 2ab = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 4 \\ b^2 = 9 \\ ab = 6 \end{cases} \Rightarrow 2 + 3i \text{ et } -2 - 3i$$

$$\bullet \quad z_1 = \frac{-i + 2 + 3i}{2} = \frac{2 + 2i}{2} = 1 + i$$

$$z_2 = \frac{-i - 2 - 3i}{2} = \frac{-2 - 4i}{2} = -1 - 2i$$

$$S = \{ 1 + i ; -1 - 2i \}$$

Problème 5 (8 points)

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation ci-dessous :

$$z^3 - (6 + 2i)z^2 + (14 + 7i)z - (15 + 3i) = 0$$

sachant que $z = 3$ est une solution.

$$p = z^3 - (6 + 2i)z^2 + (14 + 7i)z - (15 + 3i)$$

① Divisons p par $z - 3$ (Horner) :

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -6-2i & 14+7i & -15-3i \\ \textcircled{3} \nearrow & & 3 & -9-6i & 15+3i \\ \hline & 1 & -3-2i & 5+i & 0 \end{array}$$

$$p = (z - 3) \underbrace{(z - (3 + 2i)z + 5 + i)}_{p_1}$$

② $p_1 = 0$

$$a = 1; \quad b = -(3 + 2i); \quad c = 5 + i$$

$$\Delta = (3 + 2i)^2 - 4(5 + i) = 5 + 12i - 20 - 4i = -15 + 8i$$

On calcule les $\sqrt{a + bi}$ de Δ :

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -15 \\ a^2 + b^2 = 17 \\ 2ab = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 1 \\ b^2 = 16 \\ ab = 4 \end{cases} \Rightarrow 1 + 4i \text{ et } -1 - 4i$$

$$z_1 = \frac{3 + 2i + 1 + 4i}{2} = \frac{4 + 6i}{2} = 2 + 3i$$

$$z_2 = \frac{3 + 2i - 1 - 4i}{2} = \frac{2 - 2i}{2} = 1 - i$$

$$S = \{3; 2 + 3i; 1 - i\}$$