Les nombres complexes – TE 838B

Problème	1	2	3	4	5	Total
Points	8	9	8	5	8	38
Points obtenus						

Problème 1 (8 points)
Écrire les nombres complexes ci-dessous sous la forme $a + b\,\mathrm{i}$:

a) $z_1 = i^{325}$

b) $z_2 = \left[5\,;\,\frac{2\pi}{3}\right]$

c) $z_3 = (1 + 5\,\mathrm{i})\,(1 - 5\,\mathrm{i})$

d) $z_4 = \frac{1}{1 - 2\,\mathrm{i}} + \frac{1}{1 + 2\,\mathrm{i}}$

a) $z_1 = (i^4)^{81} \cdot i = \underline{i}$

b) $z_2 = 5\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$

$= 5\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \underline{-2.5 + 2.5\sqrt{3}\,i}$

c) $z_3 = 1 - 25i^2 = \underline{26}$

d) $z_4 = \frac{1+2i + 1-2i}{1-4i^2} = \underline{\frac{2}{5}}$

Problème 2 (9 points)

Soit $z_1 = -3 + 4\,\mathrm{i}$ et $z_2 = 2 - \mathrm{i}$.

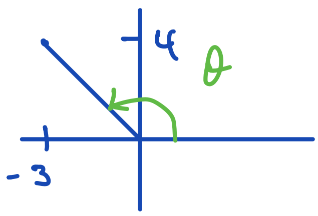
a) Calculer et donner sous forme algébrique $w_1 = -\mathrm{i} \cdot z_1 + (2 + \mathrm{i}) \cdot z_2$.

b) Calculer et donner sous forme trigonométrique $w_2 = {z_1}^{10}$.

c) Calculer et donner sous forme algébrique $w_3 = \dfrac{z_1}{z_2}$.

a) $W_1 = -i(-3+4i) + (2+i)(2-i) = \underline{3i + 4 + 5}$

$= 9 + 3i$



$\cos(\theta) = \frac{-3}{5} \Rightarrow \theta \cong 126{,}9°$

b) $z_1 = -3 + 4i$

$|z_1| = 5$

$z_1 = [5;\ 126{,}9°] \Rightarrow \underline{W_2 \cong [5^{10};\ 189°]}$

$10 \cdot 126{,}9° = 1269° = 189° + 3 \cdot 360°$

c) $W_3 = \dfrac{-3+4i}{2-i} \cdot \dfrac{2+i}{2+i} = \dfrac{-6-3i+8i+4i^2}{5} = \dfrac{-10+5i}{5}$

$= \underline{-2 + i}$

Problème 3 (8 points)
Soit l'équation complexe

$$z^3 = -27\,\mathrm{i}$$

a) Déterminer sous forme **trigonométrique** les solutions de cette équation.

b) Déterminer sous forme **algébrique** les solutions de cette équation.

c) ↷ page suivante.

a) $z = [r; \theta] \Rightarrow z^3 = [r^3; 3\theta]$

$-27i = \left[27; \frac{3\pi}{2}\right]$

1) $r^3 = 27 \Rightarrow r = 3$

2) $3\theta = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} + k\frac{2\pi}{3}$

$$\boxed{\begin{aligned} z_0 &= \left[3; \tfrac{\pi}{2}\right] \\ z_1 &= \left[3; \tfrac{7\pi}{6}\right] \\ z_2 &= \left[3; \tfrac{11\pi}{6}\right] \end{aligned}}$$

$\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3} = \frac{3\pi + 4\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$ $(210°)$

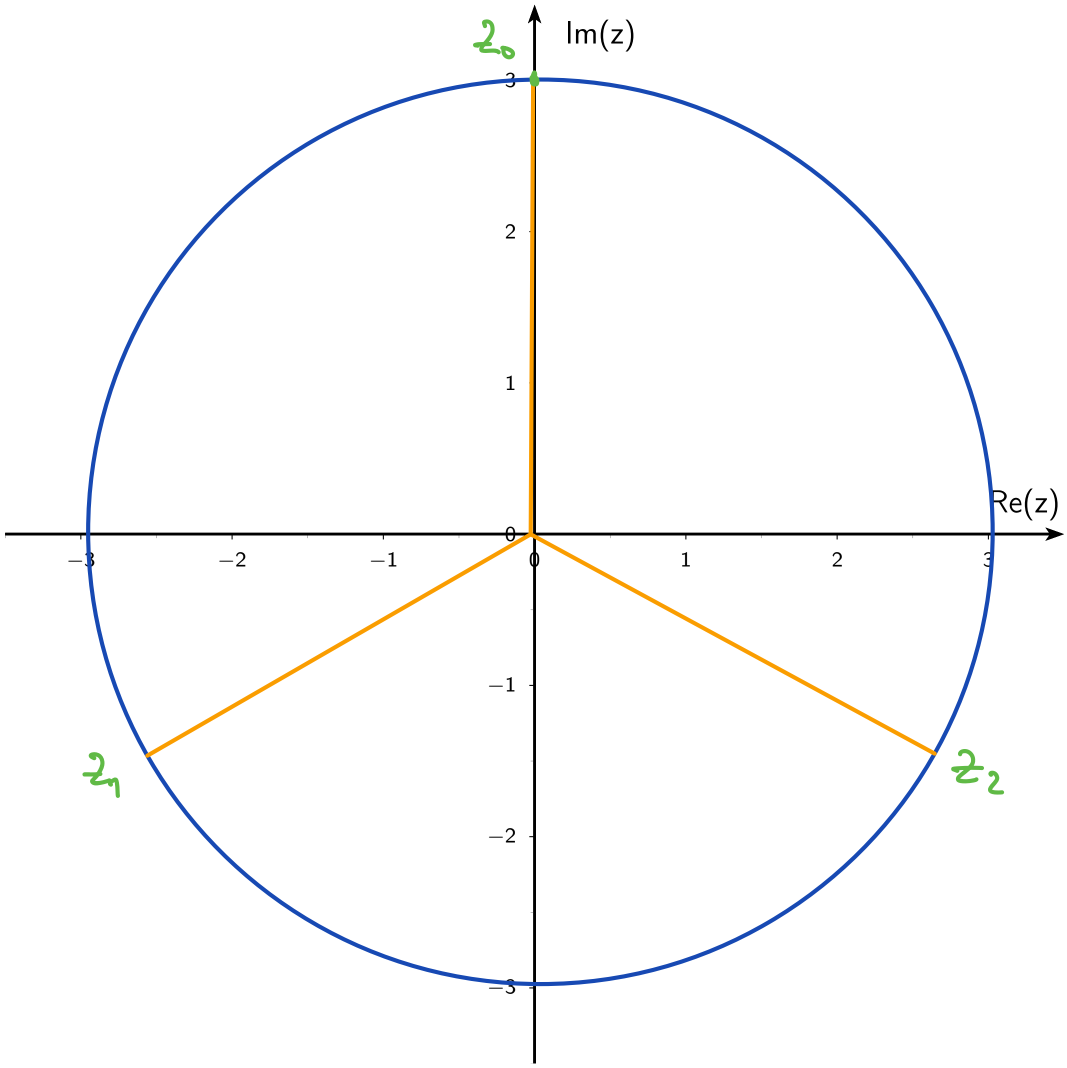
$\frac{\pi}{2} + \frac{4\pi}{3} = \frac{3\pi + 8\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$ $(330°)$

b) $z_0 = 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)i\right) = \underline{3i}$

$z_1 = 3\left(\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)i\right) = \underline{\frac{-3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i}$

$z_2 = 3\left(\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{11\pi}{6}\right)i\right) = \underline{\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i}$

c) Représenter dans le plan complexe les solutions de cette équation.



Problème 4 (5 points)
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation ci-dessous :

$$z^2 - 3\mathrm{i}\, z - 3 + \mathrm{i} = 0$$

et donner les solutions sous la forme $a + b\,\mathrm{i}$.

$a = 1$; $b = -3i$; $c = -3+i$

- $\Delta = 9i^2 - 4(-3+i) = -9 + 12 - 4i = 3 - 4i$
- on calcule les racines $a+bi$ de Δ :

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ a^2 + b^2 = 5 \\ 2ab = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 4 \\ b^2 = 1 \\ ab = -2 \end{cases} \Rightarrow 2-i \text{ et } -2+i$$

- solutions :

$$z_1 = \frac{3i + 2 - i}{2} = \frac{2 + 2i}{2} = 1 + i$$

$$z_2 = \frac{3i - 2 + i}{2} = \frac{-2 + 4i}{2} = -1 + 2i$$

$$S = \{ 1+i \,;\, -1+2i \}$$

Problème 5 (8 points)

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation ci-dessous :

$$z^3 - (6+2\,\mathrm{i})z^2 + (14+7\,\mathrm{i})z - (15+3\,\mathrm{i}) = 0$$

sachant que $z = 3$ est une solution.

$p = z^3 - (6+2\,\mathrm{i})z^2 + (14+7\,\mathrm{i})z - (15+3\,\mathrm{i})$

① Divisons p par $z-3$ (Horner) :

	1	$-6-2i$	$14+7i$	$-15-3i$
3		3	$-9-6i$	$15+3i$
	1	$-3-2i$	$5+i$	0

$$p = (z-3)(\underbrace{z-(3+2i)z+5+i}_{p_1})$$

② $p_1 = 0$

$a = 1;\ b = -(3+2i)\ ;\ c = 5+i$

$\Delta = (3+2i)^2 - 4(5+i) = 5+12i-20-4i = -15+8i$

On calcule les $\sqrt{\ }$ $a+bi$ de Δ:

$$\begin{cases} a^2-b^2 = -15 \\ a^2+b^2 = 17 \\ 2ab = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 1 \\ b^2 = 16 \\ ab = 4 \end{cases} \Rightarrow 1+4i \text{ et } -1-4i$$

$$z_1 = \frac{3+2i+1+4i}{2} = \frac{4+6i}{2} = 2+3i$$

$$z_2 = \frac{3+2i-1-4i}{2} = \frac{2-2i}{2} = 1-i$$

$S = \{3 ; 2+3i ; 1-i\}$