

Analyse 1 – TE 843B

Problème	1	2	3	4	5	6	7	Total
Points	6	4	6	6	6	6	6	40
Points obtenus								

Problème 1 (6 points)

On considère l'ensemble

$$F = \left\{ \frac{n+6}{2n+4} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

Donner, s'ils existent, le minimum, le maximum, l'ensemble des majorants, l'ensemble des minorants, la borne supérieure et la borne inférieure de l'ensemble F .

$$\begin{aligned}
 E &= \left\{ \frac{3}{2}; \frac{7}{6}; 1; \frac{9}{10}; \frac{10}{12} = \frac{5}{6}; \frac{11}{14}; \dots \right\} \\
 &= \left\{ 1,5; 1,166\dots; 1; 0,9; 0,833\dots; 0,785\dots; \dots \right\}
 \end{aligned}$$

minimum: n'existe pas

maximum: $\frac{3}{2}$

ensemble des majorants: $\left[\frac{3}{2}; +\infty \right[$

ensemble des minorants: $] -\infty; \frac{1}{2}]$

borne supérieure: $\frac{3}{2}$

borne inférieure: $\frac{1}{2}$

Problème 2 (4 points)

Déterminer si les applications f_1 et f_2 sont injectives, surjectives. Justifier.

a) $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto 4x - 3$

b) $f_2 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$
 $x \mapsto x^4$

a) Injective: $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $f_1(a) = f_1(b)$
 $4a - 3 = 4b - 3 \Leftrightarrow a = b$
 f_1 injective

Surjective: $y \in \mathbb{R}$, trouvons $x \in \mathbb{R}$ tel que
 $f_1(x) = y$.

$$4x - 3 = y \Leftrightarrow 4x = y + 3 \Leftrightarrow x = \frac{y+3}{4}$$

f_1 surjective

b) Injective: $f_2(-1) = f_2(1) = 1$, non injective

Surjective: $f_2(x) = 2 \Leftrightarrow x^4 = 2 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt[4]{2} \notin \mathbb{Z}$
non surjective

Problème 3 (6 points)

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{6x^2 + 7x - 3}$

b) $g(x) = \sqrt{\frac{5-2x}{x+6}}$

c) $h(x) = \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2 - 2x + 1}$

a) $6x^2 + 7x - 3 = 0$
 $(3x-1)(2x+3) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \text{ ou } x = -\frac{3}{2}$
 $ED(f) = \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{3}; -\frac{3}{2} \right\}$

b)

x	-6	5/2
$\frac{5-2x}{x+6}$	-	+
		0 -

$$ED(g) = \left] -6; \frac{5}{2} \right]$$

c) $h(x) = \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{(x-1)^2}$

$$ED(h) = \mathbb{R}^* - \{1\}$$

Problème 4 (6 points)

Une suite u_n converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$ si pour tout $\epsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n > N$, on a

$$|u_n - \ell| < \epsilon$$

On considère la suite

$$u_n = \frac{4n}{n+6}$$

et on donne $\ell = 4$.

- a) Si $\epsilon = 0.001$, calculer la valeur de N à partir de laquelle $|u_n - 4| < \epsilon = 0.001$.
- b) Démontrer que cette suite converge vers $\ell = 4$ au sens de la définition donnée au début du problème.

$$a) \quad |u_n - 4| = \left| \frac{4n}{n+6} - 4 \right| = \left| \frac{4n - 4n - 24}{n+6} \right| = \frac{24}{n+6} < \frac{1}{1000}$$

$$\Leftrightarrow 24000 < n+6 \Leftrightarrow n > 23994$$

Si $N = 23994$, alors pour tout $n > N$, on a $|u_n - 4| < \epsilon$

$$b) \quad |u_n - 4| < \epsilon \Leftrightarrow \frac{24}{n+6} < \epsilon \Leftrightarrow 24 < \epsilon n + 6\epsilon$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{24 - 6\epsilon}{\epsilon}$$

Pour tout $n > \left[\frac{24 - 6\epsilon}{\epsilon} \right]$, on a $|u_n - 4| < \epsilon$.

Problème 5 (6 points)

Déterminer le plus grand sous-ensemble de définition et l'ensemble d'arrivée pour que la fonction

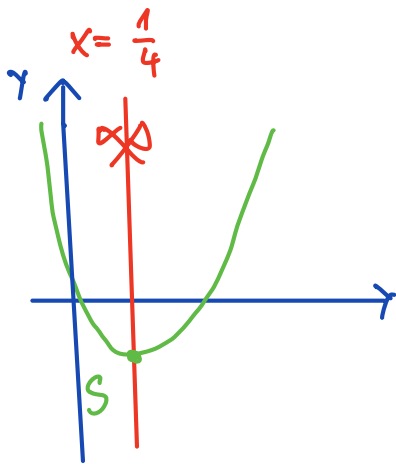
$$f(x) = 2x^2 - x - 6$$

soit une bijection. Puis donner sa réciproque.

• Axe de symétrie: $x = \frac{1}{4}$

• Sommet: $f\left(\frac{1}{4}\right) = 2 \cdot \frac{1}{16} - \frac{1}{4} - 6 = \frac{1}{8} - \frac{1}{4} - 6 = \frac{1-2-48}{8}$
 $= -\frac{49}{8}$

$$S\left(\frac{1}{4}; -\frac{49}{8}\right)$$



$$f: \left[\frac{1}{4}; +\infty\right[\rightarrow \left[-\frac{49}{8}; +\infty\right[$$

 $x \mapsto 2x^2 - x - 6$

• Réciproque:

$$\begin{aligned} 2x^2 - x - 6 &= y \\ 2x^2 - x &= y + 6 \\ x^2 - \frac{1}{2}x &= \frac{y}{2} + 3 \\ \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 &= \frac{y}{2} + 3 + \frac{1}{16} \\ \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 &= \frac{y}{2} + \frac{49}{16} \\ x &= \sqrt{\frac{8y + 49}{16}} + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$f: \left[-\frac{49}{8}; +\infty\right[\rightarrow \left[\frac{1}{4}; +\infty\right[$$

 $x \mapsto \frac{\sqrt{8x + 49}}{4} + \frac{1}{4}$

Problème 6 (6 points)

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{2n-7}{3n+2}$ avec $n \geq 1$.

- a) Montrer que (u_n) est strictement croissante.
- b) Démontrer que cette suite admet le nombre $m = -1$ pour minorant.
- c) La suite (u_n) est-elle convergente ? Si oui, calculer sa limite.

$$\begin{aligned} 2) \quad u_{n+1} - u_n &= \frac{2n+2-7}{3n+3+2} - \frac{2n-7}{3n+2} = \frac{2n-5}{3n+5} - \frac{2n-7}{3n+2} \\ &= \frac{(2n-5)(3n+2) - (2n-7)(3n+5)}{(3n+5)(3n+2)} \\ &= \frac{6n^2 - 11n - 10 - 6n^2 + 11n + 35}{(3n+5)(3n+2)} = \frac{25}{(3n+5)(3n+2)} > 0 \end{aligned}$$

$u_{n+1} > u_n \Leftrightarrow (u_n)$ est strictement croissante

$$\begin{aligned} b) \quad u_n - (-1) &= \frac{2n-7}{3n+2} + 1 = \frac{2n-7+3n+2}{3n+2} = \frac{5n-5}{3n+2} \\ &= \frac{5(n-1)}{3n+2} \geq 0, \text{ si } n \geq 1 \end{aligned}$$

donc -1 est le minorant

$$c) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \frac{2}{3}, \quad (u_n) \text{ converge vers } \frac{2}{3}.$$

Problème 7 (6 points)

Soit la suite (u_n) définie par

$$u_n = n \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1 \right)$$

pour $n \geq 1$.

- a) Calculer u_1 et u_{100} .
- b) Calculer, si elle existe la limite de cette suite.

$$\begin{aligned} 2) \quad u_1 &= 1 \cdot (\sqrt{2} - 1) = \sqrt{2} - 1 \approx 0,414214 \\ u_{100} &= 100 \left(\sqrt{\frac{101}{100}} - 1 \right) \approx 0,498756 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt{\frac{n+1}{n}} - 1 \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \frac{\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1 \right) \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1 \right)}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} \\ &\quad \text{"} \infty \cdot 0 \text{"} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left(1 + \frac{1}{n} - 1 \right)}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cancel{n} \cdot \frac{1}{\cancel{n}}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$