

Asymptotes – TE 848A

Problème	1	2	3	Total
Points	6	6	11	23
Points obtenus				

Problème 1 (6 points)

Rechercher toutes les asymptotes à la courbe représentative de la fonction

$$f(x) = \frac{-3x^3 + 5x^2 + 17x - 11}{x^2 - x - 6}$$

① AV: $x^2 - x - 6 = 0$
 $(x-3)(x+2) = 0 \Rightarrow \text{ED}(f) = \mathbb{R} - \{-2; 3\}$

$x = -2$: $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \infty$ " $\frac{-1}{0}$ " $\Rightarrow$ $x = -2$ est une AV

$x = 3$: $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \infty$ " $\frac{4}{0}$ " $\Rightarrow$ $x = 3$ est une AV

② At: par division:

$$\begin{array}{r|l}
 -3x^3 + 5x^2 + 17x - 11 & x^2 - x - 6 \\
 \underline{-3x^3 + 3x^2 + 18x} & \\
 2x^2 - x - 11 & \\
 \underline{2x^2 - 2x - 12} & \\
 x + 1 & \\
 \hline
 & -3x + 2 \\
 & \Rightarrow \underline{y = -3x + 2 \text{ est une At}}
 \end{array}$$

Problème 2 (6 points)

Soit la fonction définie par

$$f(x) = \frac{4x^3 - 5x^2 - 37x - 18}{x^2 - 2x - 8}$$

Déterminer la position de la courbe $y = f(x)$ par rapport à son asymptote oblique.

Recherche de l'AO par division:

$$\begin{array}{r|l} 4x^3 - 5x^2 - 37x - 18 & x^2 - 2x - 8 \\ \underline{4x^3 - 8x^2 - 32x} & 4x + 3 \\ & 3x^2 - 5x - 18 \\ & \underline{3x^2 - 6x - 24} \\ & x + 6 \end{array}$$

$$f(x) = 4x + 3 + \boxed{\frac{x+6}{(x-4)(x+2)}}^{\delta(x)}$$

Position entre l'AO $y = 4x + 3$ et la courbe

x	-6	-2	4
$\delta(x)$	-	+	-
Position	au-dessus	au-dessus	au-dessus

Problème 3 (11 points)

Soit la fonction définie par

$$f(x) = \sqrt{25x^2 + 10x + 8} - (5x - 2)$$

- a) Déterminer l'ensemble de définition de f
- b) Déterminer le signe de f
- c) Déterminer toutes les asymptotes de la courbe $y = f(x)$

a) $25x^2 + 10x + 8 = 0$

$$\Delta = 100 - 800 < 0 \Rightarrow 25x^2 + 10x + 8 > 0 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}$$

$$ED(f) = \mathbb{R}$$

b) zéro: $25x^2 + 10x + 8 = (5x - 2)^2$, $x \geq \frac{2}{5}$

$$25x^2 + 10x + 8 = 25x^2 - 20x + 4$$

$$30x = -4$$

$$x = -\frac{2}{15} < \frac{2}{5} \text{ ne convient pas}$$

x	
$f(x)$	+

c) Aucune AV: cf $ED(f)$

A droite :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[\sqrt{25x^2 + 10x + 8} - (5x - 2)][\sqrt{25x^2 + 10x + 8} + (5x - 2)]}{\sqrt{25x^2 + 10x + 8} + (5x - 2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{25x^2 + 10x + 8 - (25x^2 - 20x + 4)}{5x\sqrt{1+\dots} + 5x(1+\dots)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{30x + 4}{5x(\sqrt{1+\dots} + \sqrt{1+\dots})} = \frac{30}{10} = 3$$

$\Rightarrow y = 3$ est une At à droite

A gauche :

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{25x^2 + 10x + 8} - (5x - 2)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-5x\sqrt{1+\dots} - 5x(1+\dots)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-5x(\sqrt{1+\dots} + \sqrt{1+\dots})}{x}$$

$$= -10$$

$$h = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{25x^2 + 10x + 8} + 5x + 2)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{25x^2 + 10x + 8} + (5x + 2))(\sqrt{25x^2 + 10x + 8} - (5x + 2))}{(\sqrt{25x^2 + 10x + 8} - (5x - 2))}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{25x^2 + 10x + 8 - 25x^2 - 20x - 4}{-5x\sqrt{1+\dots} - 5x(1+\dots)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-10x + 4}{-5x(\sqrt{1+\dots})} = \frac{-10}{-10} = 1$$

$\Rightarrow y = -10x + 1$ est une At à gauche