

Asymptotes – TE 848B

Problème	1	2	3	Total
Points	6	6	11	23
Points obtenus				

Problème 1 (6 points)

Rechercher toutes les asymptotes à la courbe représentative de la fonction

$$f(x) = \frac{-3x^3 - 2x^2 + 20x - 4}{x^2 + x - 6}$$

① AV: $x^2 - x - 6 = 0$
 $(x+3)(x-2) = 0 \Rightarrow \text{ED}(f) = \mathbb{R} - \{-3; 2\}$

$x = -3$: $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \infty$ " $\frac{\neq}{0}$ " $\Rightarrow$ $x = -3$ est une AV

$x = 2$: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \infty$ " $\frac{\neq}{0}$ " $\Rightarrow$ $x = 2$ est une AV

② AH: par division:

$$\begin{array}{r|l}
 -3x^3 - 2x^2 + 20x - 4 & x^2 + x - 6 \\
 \underline{-3x^3 - 3x^2 + 18x} & \\
 x^2 + 2x - 4 & \\
 \underline{x^2 + x - 6} & \\
 x + 2 &
 \end{array}
 \Rightarrow \underline{y = -3x + 1 \text{ est une AD}}$$

Problème 2 (6 points)

Soit la fonction définie par

$$f(x) = \frac{4x^3 + 10x^2 - 27x - 13}{x^2 + 2x - 8}$$

Déterminer la position de la courbe $y = f(x)$ par rapport à son asymptote oblique.

Recherche de l'AO par division:

$$\begin{array}{r|l} 4x^3 + 10x^2 - 27x - 13 & x^2 + 2x - 8 \\ 4x^3 + 8x^2 - 32x & 4x + 2 \\ \hline 2x^2 + 5x - 13 & \\ 2x^2 + 4x - 16 & \\ \hline x + 3 & \end{array}$$

$$f(x) = 4x + 2 + \boxed{\frac{x+3}{(x+4)(x-2)}}^{\delta(x)}$$

Position entre l'AO $y = 4x - 3$ et la courbe

X	-4	-3	2
$\delta(x)$	-	+ 0 -	+
Position	au-dessous	au-dessus	au-dessous

Problème 3 (11 points)

Soit la fonction définie par

$$f(x) = \sqrt{25x^2 + 10x + 8} - (5x - 2)$$

- a) Déterminer l'ensemble de définition de f
- b) Déterminer le signe de f
- c) Déterminer toutes les asymptotes de la courbe $y = f(x)$

$$a) \quad 25x^2 + 10x + 8 = 0$$

$$\Delta = 100 - 800 < 0 \Rightarrow 25x^2 + 10x + 8 > 0 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}$$

$$ED(f) = \mathbb{R}$$

$$b) \text{ zéro: } 25x^2 + 10x + 8 = (5x - 2)^2, \quad x \geq \frac{2}{5}$$

$$25x^2 + 10x + 8 = 25x^2 - 20x + 4$$

$$30x = -4$$

$$x = -\frac{2}{15} < \frac{2}{5} \text{ ne convient pas}$$

x	
$f(x)$	+

$$c) \text{ Aucune AV: cf } ED(f)$$

A droite :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[\sqrt{25x^2 + 10x + 8} - (5x - 2)][\sqrt{25x^2 + 10x + 8} + (5x - 2)]}{\sqrt{25x^2 + 10x + 8} + (5x - 2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{25x^2 + 10x + 8 - (25x^2 - 20x + 4)}{5x\sqrt{1+\dots} + 5x(1+..)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{30x + 4}{5x(\sqrt{1+\dots} + \sqrt{1+\dots})} = \frac{30}{10} = 3$$

$\Rightarrow y = 3$ est une AH à droite

A gauche :

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{25x^2 + 10x + 8} - (5x - 2)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-5x\sqrt{1+\dots} - 5x(1+\dots)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-5x(\sqrt{1+\dots} + 1+\dots)}{x}$$

$$= -10$$

$$h = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{25x^2 + 10x + 8} + 5x + 2)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{25x^2 + 10x + 8} + (5x + 2))(\sqrt{25x^2 + 10x + 8} - (5x + 2))}{(\sqrt{25x^2 + 10x + 8} - (5x - 2))}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{25x^2 + 10x + 8 - 25x^2 - 20x - 4}{-5x\sqrt{1+\dots} - 5x(1+\dots)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-10x + 4}{-5x(\sqrt{1+\dots} + 1+\dots)} = \frac{-10}{-10} = 1$$

$\Rightarrow y = -10x + 1$ est une AO à gauche