

**Calcul différentiel – TE 850A**

| Problème       | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Total |
|----------------|---|---|---|---|---|---|-------|
| Points         | 5 | 9 | 7 | 5 | 8 | 8 | 42    |
| Points obtenus |   |   |   |   |   |   |       |

**Problème 1** (5 points)

En utilisant uniquement la définition formelle, soit

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{ou} \quad f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

et en donnant toutes les étapes, calculer la dérivée de la fonction donnée par l'expression ci-dessous

$$f(x) = \frac{2x-1}{x+3}$$

$$\begin{aligned}
 f'(2) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{2x-1}{x+3} - \frac{2a-1}{a+3}}{x-a} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2x-1)(a+3) - (x+3)(2a-1)}{(x+3)(a+3)(x-a)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2ax + 6x - a - 3) - (2ax - x + 6a - 3)}{(x+3)(a+3)(x-a)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{7x - 7a}{(x+3)(a+3)(x-a)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{7(x-a)}{(x+3)(a+3)(x-a)} \\
 &= \frac{7}{(a+3)^2} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{7}{(x+3)^2}
 \end{aligned}$$

---

**Problème 2** (9 points)Calculer la dérivée  $f'(x)$  de chacune des fonctions suivantes :

a)  $f(x) = (x^2 - 8)(5x + 6)^2$

c)  $f(x) = 1 + \cos\left(\frac{\pi}{2x}\right)$

b)  $f(x) = \frac{2 + x^2}{2 - x^3}$

$$\begin{aligned} \text{a) } f'(x) &= 2x(5x+6)^2 + (x^2-8) \cdot 2(5x+6) \cdot 5 \\ &= (5x+6) [2x(5x+6) + 10(x^2-8)] \\ &= (5x+6) (20x^2 + 12x - 80) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } f'(x) &= \frac{2x(2-x^3) - (2+x^2) \cdot (-3x^2)}{(2-x^3)^2} \\ &= \frac{4x - 2x^4 + 6x^2 + 3x^4}{(2-x^3)^2} = \frac{x^4 + 6x^2 + 4x}{(2-x^3)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } f'(x) &= -\sin\left(\frac{\pi}{2x}\right) \cdot \left(\frac{\pi}{2x}\right)' = -\sin\left(\frac{\pi}{2x}\right) \cdot \frac{-2\pi}{4x^2} \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{2x}\right) \cdot \frac{\pi}{2x^2} = \frac{\pi \sin\left(\frac{\pi}{2x}\right)}{2x^2} \end{aligned}$$

**Problème 3** (7 points)

Étudier uniquement la courbure (convexité et concavité) de la fonction  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 3}$

Donner les coordonnées des points d'inflexion.

$$1^o) f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+3)^2}$$

$$\begin{aligned} 2^o) f''(x) &= \frac{-2(x^2+3)^2 + 2x \cdot 2(x^2+3) \cdot 2x}{(x^2+3)^4} \\ &= \frac{\cancel{(x^2+3)} [-2(x^2+3) + 8x^2]}{(x^2+3)^{\cancel{4}3}} \end{aligned}$$

$$= \frac{6x^2 - 6}{(x^2+3)^3} = \frac{6(x-1)(x+1)}{(x^2+3)^3}$$

Tableau de la courbure:

| x        | -1                                                                                  |                                                                                     | 1                                                                                   |                                                                                     |                                                                                     |
|----------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| $f''(x)$ | +                                                                                   | 0                                                                                   | -                                                                                   | 0                                                                                   | +                                                                                   |
| $f(x)$   |  | <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">pi</div> |  | <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">pi</div> |  |
|          | convexe                                                                             |                                                                                     | concave                                                                             |                                                                                     | convexe                                                                             |

pi :  $(-1; \frac{1}{4})$  et  $(1; \frac{1}{4})$

---

**Problème 4** (5 points)

Calculer les coordonnées des points de la courbe  $y = x^3 + 3x^2 - 4x + 5$  en lesquels la tangente est parallèle à la droite d'équation  $2y + 8x = 10$ .

- $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4x + 5$

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 4$$

- Pente de la droite :  $y = -4x + 5 \Rightarrow m = -4$

- $f'(x) = -4 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow 3x(x + 2) = 0$

$$\Rightarrow 1) x = 0 \quad \underline{A(0; 5)}$$

$$2) x = -2 : f(-2) = 17 \Rightarrow \underline{B(-2; 17)}$$

**Problème 5** (8 points)

Soit la fonction  $f(x) = (1-x)\sqrt{1-x^2}$ .

- a) Déterminer l'ensemble de définition  $ED(f)$  de  $f(x)$ .  
 b) Déterminer la croissance de la fonction  $f(x)$  et donner les coordonnées du maximum de  $f(x)$ .

a)  $ED(f) = [-1; 1]$

b) 
$$f'(x) = -\sqrt{1-x^2} + (1-x) \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-(1-x^2) - (1-x) \cdot x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{-1+x^2-x+x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2x^2-x-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad ED(f') = ]-1; 1[$$

$$2x^2 - x - 1 = 0$$

$$(2x+1)(x-1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad x = 1$$

$\underbrace{x=1}_{\text{à exclure}}$

| x       | -1  | $-\frac{1}{2}$ | 1   |
|---------|-----|----------------|-----|
| $f'(x)$ | /// | + 0            | -   |
| $f(x)$  | /// | max            | min |

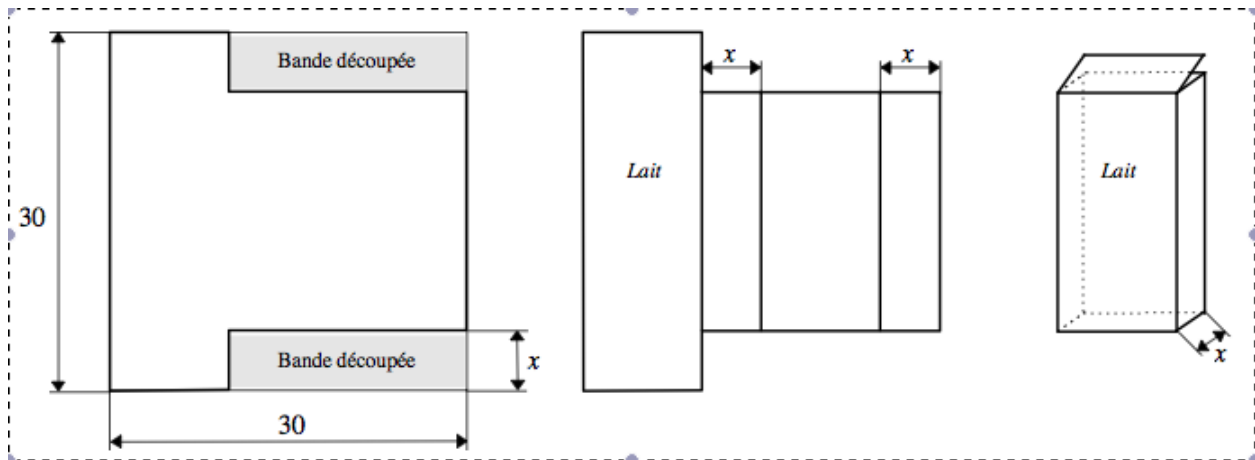
$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

max:  $\left(-\frac{1}{2} ; \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$

### Problème 6 (8 points)

Un fabricant envisage la production de briques de lait en carton obtenues en découpant deux bandes de même largeur dans une feuille carrée. Le côté de la feuille carrée mesure 30 cm et on désigne par  $x$  la mesure (en centimètres) de la largeur des bandes découpées. On suppose que  $0 < x < 15$ .

- Déterminer les dimensions de la brique qui a un volume maximal.
- Calculer ce volume.



2) Volume:  $V(x) = x \cdot (15 - x)(30 - 2x) = 2x(15 - x)^2$ ,  $0 < x < 15$

$$V(x) = 2x^3 - 60x^2 + 450x$$

$$V'(x) = 6x^2 - 120x + 450 = 6(x^2 - 20x + 75)$$

$$= 6(x - 5)(x - 15)$$

Tableau des variations de  $V(x)$ :

| $x$     | 0   | 5   | 15  |
|---------|-----|-----|-----|
| $V'(x)$ | +   | +   | -   |
| $V(x)$  | /// | max | /// |

Le max est atteint lorsque  $x = 5$  [cm]

Les dimensions sont:  $5 \times 10 \times 20$  [cm]

b) Le volume est égal à  $5 \cdot 10 \cdot 20 = 1000$  [cm<sup>3</sup>] =  $1$  [dm<sup>3</sup>] =  $1$  [l]