03.09.25

1.2.9 Déterminer sous forme trigonométrique et représenter dans le plan complexe :

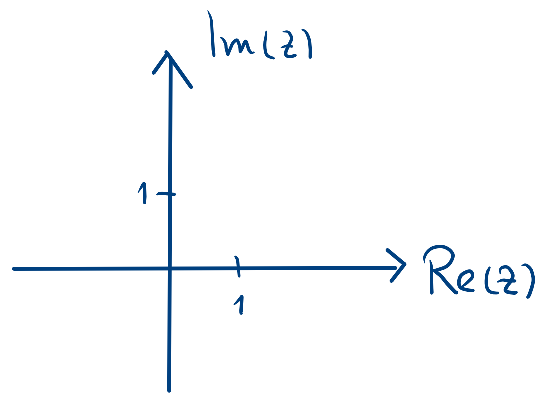
a) les racines septièmes de l'unité,

$z^7 = 1$

Dans $\mathbb{C}$, il y a 7 solutions.

On pose $z = [r ; \theta]$

$1 = [1 ; 0]$



$z^7 = [r^7 ; 7\theta]$

$\Rightarrow \begin{cases} r^7 = 1 & \Rightarrow r = 1 \\ 7\theta = 0 + k \cdot 360° & \Rightarrow \theta = k \cdot \dfrac{360°}{7} \end{cases}$

$k=0$: $z_0 = [1 ; 0] = 1$

$k=1$: $z_1 = [1 ; 51,43°]$

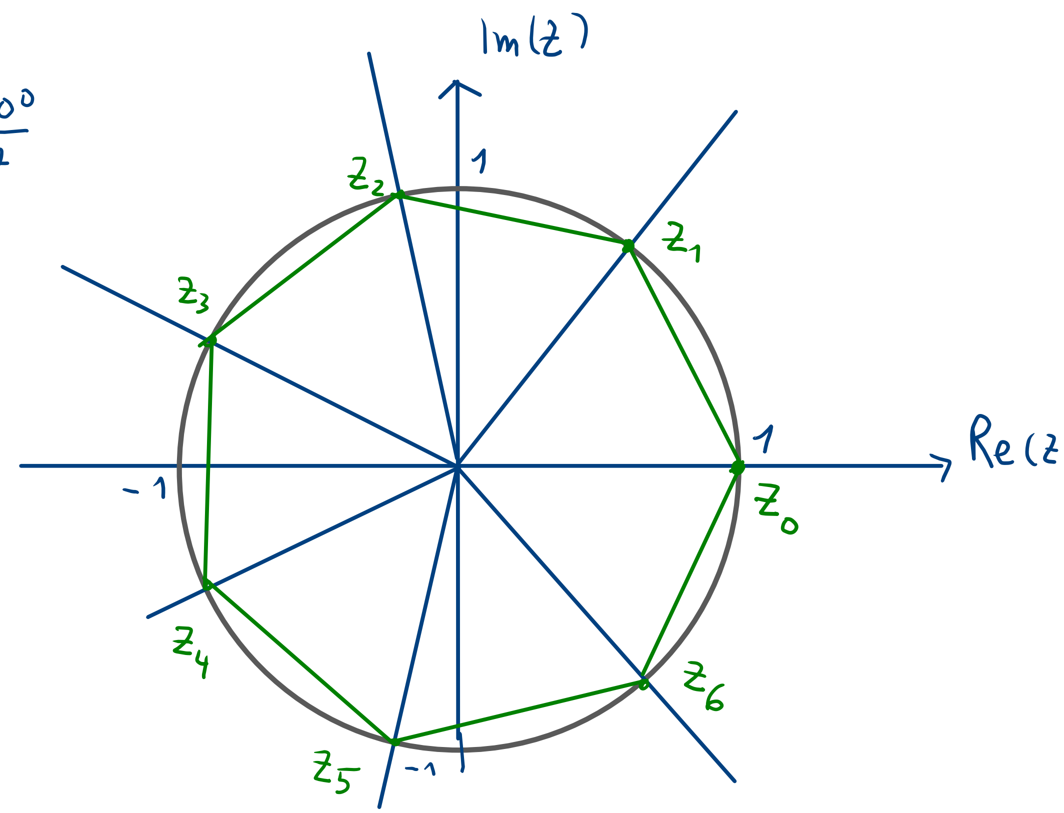
$k=2$: $z_2 = [1 ; 102,86°]$

$k=3$: $z_3 = [1 ; 154,29°]$

$k=4$: $z_4 = [1 ; 205,72°]$

$k=5$: $z_5 = [1 ; 257,14°]$

$k=6$: $z_6 = [1 ; 308,57°]$



Les solutions forment un heptagone régulier

1.2.10 Déterminer sous forme algébrique les racines carrées complexes des nombres ci-dessous :

a) 1

b) i

c) $-i$

Dans $\mathbb{R}$

① $x^2 = 9$, $x = \pm 3$ ✓ ② $\sqrt{9} = 3$ × ③ $x^2 = -9$ pas de sol × ④ $\sqrt{-9}$ n'existe ×

Dans $\mathbb{C}$

a) $z^2 = 1 \Rightarrow z = \pm 1$

b) $z^2 = i$

Posons $z = a + bi \Rightarrow z^2 = (a+bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi$

Donc $a^2 - b^2 + 2abi = i$. On a :

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ 2ab = 1 \end{cases}$$

A ce système, je rajoute l'expression du module au carré :

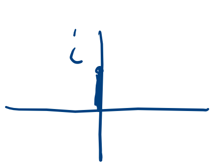
$|z|^2 = a^2 + b^2$ et $|i| = 1$. On peut résoudre le système :

réelle
module
Imaginaire

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ a^2 + b^2 = 1 \\ 2ab = 1 \end{cases} \left| \begin{matrix} b^2 \\ \cdot 1 \\ \cdot 1 \end{matrix} \right| \begin{matrix} a^2 \\ \cdot(-1) \\ \cdot 1 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2 = 1 \\ 2b^2 = 1 \\ 2ab = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = \frac{1}{2} \\ b^2 = \frac{1}{2} \\ ab = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \\ b = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \\ ab = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Les deux racines de i :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i \quad \text{et} \quad -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} i$$



$z = a + bi \Rightarrow |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Preuve :

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\,i\right)^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 2 \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}}_{\frac{1}{2}}\, i = i$$

On n'écrit pas $\sqrt{i}$, c'est moche ☹