1.2.10 Déterminer sous forme algébrique les racines carrées complexes des nombres ci-dessous :

a) 1

b) i

c) $-i$

d) -9

e) $3+4i$

f) $-5+12i$

$$\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

e) $z = 3+4i$ $\quad \sqrt{3^2+4^2} = 5$

$r = a+bi$ tel $r^2 = z$

$$\boxed{\begin{aligned} |r| &= \sqrt{a^2+b^2} \\ |r|^2 &= a^2+b^2 \end{aligned}}$$

$$r^2 = \underbrace{a^2-b^2}_{\text{réelle}} + \underbrace{2abi}_{\text{imaginaire}}$$

$$\left\{\begin{aligned} a^2-b^2 &= 3 \\ a^2+b^2 &= 5 \\ 2ab &= 4 \end{aligned}\right. \quad \begin{array}{c|c} b^2 & a^2 \\ \cdot 1 & \cdot(-1) \\ \cdot 1 & \cdot 1 \end{array} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} 2a^2 &= 8 \\ 2b^2 &= 2 \\ ab &= 2 \end{aligned}\right. \Rightarrow \left\{\begin{aligned} a^2 &= 4 \\ b^2 &= 1 \\ ab &= 2 \end{aligned}\right. \Rightarrow \left\{\begin{aligned} a &= \pm 2 \\ b &= \pm 1 \\ ab &= 2 \end{aligned}\right.$$

Les deux racines carrées sont $2+i$ et $-2-i$

Dans $\mathbb{R}$: $\sqrt{9} = 3$

Dans $\mathbb{C}$: $\sqrt{3+4i}$ $\begin{cases} 2+i \\ -2-i \end{cases}$

On n'écrit pas cela

1.2.10

f) $-5+12i = z$ $\qquad |z| = 13$ $\qquad \sqrt{9} = 3$

$r = a + bi$, $\quad z = r^2$

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -5 \\ a^2 + b^2 = 13 \\ 2ab = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a^2 = 8 \\ b^2 = 18 \\ ab = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 4 \\ b^2 = 9 \\ ab = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm 2 \\ b = \pm 3 \\ ab = 6 \end{cases}$$

$r_1 = 2 + 3i$ et $r_2 = -2 - 3i$

$$\left[\begin{array}{l} r_1^2 = (2+3i)^2 = 4 - 9i^2 + 12i = -5 + 12i \\ r_2^2 = (-2-3i)^2 = (2+3i)^2 = -5 + 12i \end{array}\right]$$

Pour contrôle

1.3 Propriétés algébriques des nombres complexes

1.3.1 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations ci-dessous :

a) $z^2 = 25$

b) $z^2 = -4$

c) $2z^2 + 10z + 17 = 0$

d) $z^2 + 3z - 5 = 0$

e) $z^2 - 3(1+i)z + 6 + 7i = 0$

f) $(1+2i)z^2 - (7+4i)z + 5 - 5i = 0$

On résout ces équations avec Viète.

$$az^2 + bz + c = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \in \mathbb{C}$$

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$\sqrt{25} = 5$

$r = a + bi = \sqrt{\underbrace{-5 + 12i}_{|z|=5}}$

$()^2 \downarrow$

$a^2 - b^2 + 2abi = -5 + 12i$

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -5 \\ a^2 + b^2 = 5 \\ 2ab = 12 \end{cases}$$

- $\sqrt{16} = 4$ dans $\mathbb{R}$

$\sqrt{-16} = \sqrt{16i^2} = \sqrt{(4i)^2} \rightarrow \begin{cases} 4i \\ -4i \end{cases}$

- $\sqrt{-17} \begin{cases} \sqrt{17}\, i \\ -\sqrt{17}\, i \end{cases}$ dans $\mathbb{C}$

$z^2 = 25 \Rightarrow z^2 = 5^2 \Rightarrow z = \pm 5$

$z^2 = -4 \Rightarrow z^2 = 4i^2 \Rightarrow z^2 = (2i)^2 \Rightarrow z = \pm 2i$

1.3.1

c) $2z^2 + 10z + 17 = 0$

$$\Delta = 10^2 - 4 \cdot 2 \cdot 17 = -36 = 36i^2 = (6i)^2$$

$$z_1 = \frac{-10 + 6i}{4} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-10 - 6i}{4}$$

$$z_1 = \frac{-10}{4} + \frac{6}{4}i = \frac{-5}{2} + \frac{3}{2}i \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-5}{2} - \frac{3}{2}i$$

$$S = \left\{ -\frac{5}{2} + \frac{3}{2}i \; ; \; -\frac{5}{2} - \frac{3}{2}i \right\}$$

f) $(1+2i)z^2-(7+4i)z+5-5i=0$

$a=(1+2i)$

$b=-(7+4i)$

$c=5-5i$

(1) $\Delta = b^2-4ac = \left(-(7+4i)\right)^2-4(1+2i)(5-5i)$

$= 49-16+56i - 4\left(5-10i^2-5i+10i\right)$

$= 33+56i-4(15+5i) = 33+56i-60-20i$

$= -27+36i$

(2) On calcule les racines carrées de Δ :

$\begin{cases} a^2-b^2 = -27 \\ a^2+b^2 = 45 \\ 2ab = 36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a^2 = 18 \\ 2b^2 = 72 \\ ab = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2=9 \\ b^2=36 \\ ab=18 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} a=\pm 3 \\ b=\pm 6 \\ ab=18 \end{matrix}$

$\sqrt{\Delta}$: $3+6i$ et $-3-6i$

(3) $z_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{7+4i+3+6i}{2(1+2i)} = \dfrac{\overset{5}{\cancel{10}}+\overset{5}{\cancel{10}}i}{\underset{1}{\cancel{2}}(1+2i)} = \dfrac{5+5i}{1+2i}\;\dfrac{1-2i}{1-2i}$

$= \dfrac{5-10i^2+5i-10i}{5} = \dfrac{15-5i}{5} = \dfrac{15}{5}-\dfrac{5}{5}i = 3-i$

$z_2 = \dfrac{7+4i-3-6i}{2(1+2i)} = \dfrac{\overset{2}{\cancel{4}}-\overset{1}{\cancel{2}}i}{\underset{1}{\cancel{2}}(1+2i)} = \dfrac{2-i}{1+2i}\;\dfrac{1-2i}{1-2i} = \dfrac{2+2i^2-i-4i}{5}$

$= \dfrac{-5i}{5} = -i$

$S = \{3-i\,;\,-i\}$

1.3.1
e)
1.3.5

1.3.5 Soit l'équation

$$3\,z^3 + 2\,z^2 + 7\,z - 20 = 0$$

a) Vérifier que le nombre complexe $u = -1 + 2\,i$ est solution de l'équation ci-~~dessous~~ dessus.

b) Résoudre complètement l'équation ci-dessus dans $\mathbb{C}$.

c) En déduire une factorisation du polynôme

$$P(x) = 3\,x^3 + 2\,x^2 + 7\,x - 20$$

dans l'ensemble des polynômes à coefficients réels.

a) ...

b) Par Horner !