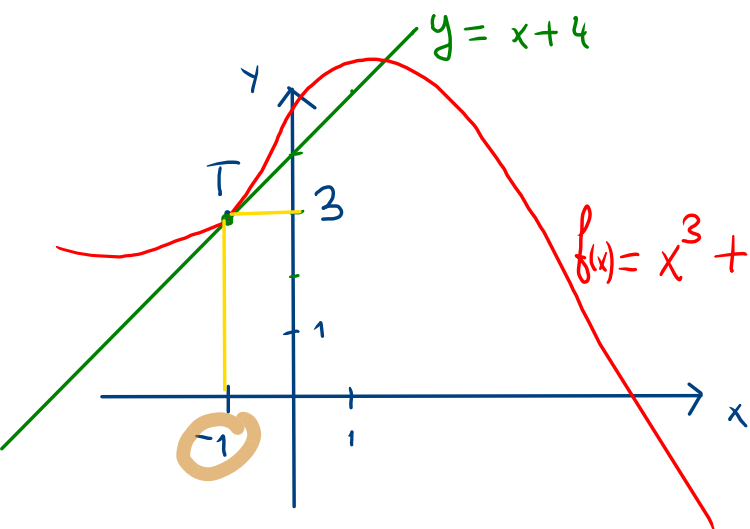


2.9.22 Pour quels réels a et b le graphe de la fonction $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ admet-elle pour tangente au point d'abscisse -1 la droite d'équation $y = x + 4$?



$$1) T(-1; 3)$$

$$2) f'(-1) = 1$$

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx$$

$$1) f(-1) = 3 \quad ; \quad \begin{aligned} -1 + a - b &= 3 \\ a - b &= 4 \end{aligned}$$

$$2) f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

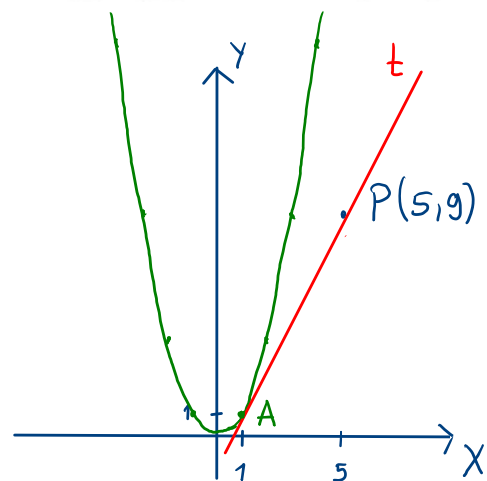
$$f'(-1) = 1 \quad ; \quad \begin{aligned} 3 - 2a + b &= 1 \\ -2a + b &= -2 \end{aligned}$$

On résout le système :

$$\begin{cases} a - b = 4 \\ -2a + b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -6 \end{cases}$$

2.9.23 Déterminer les équations des tangentes au graphe de f issues du point P :

a) $f(x) = x^2$, $P(5; 9)$



1) La tangente $\bar{a}$ la courbe issue de P
s'écrit : $(t): y = mx + h$

2) t passe par P : $9 = 5m + h$
 $h = -5m + 9$

$(t): y = mx - 5m + 9$

3) Soit $A(a, a^2)$ le point sur la courbe qui est sur t .

4) $f'(x) = 2x$, La pente en a est égale à
 $f'(a) = 2a = m \Rightarrow (t): y = 2ax - 10a + 9$

5) A est sur t : $a^2 = 2a^2 - 10a + 9$

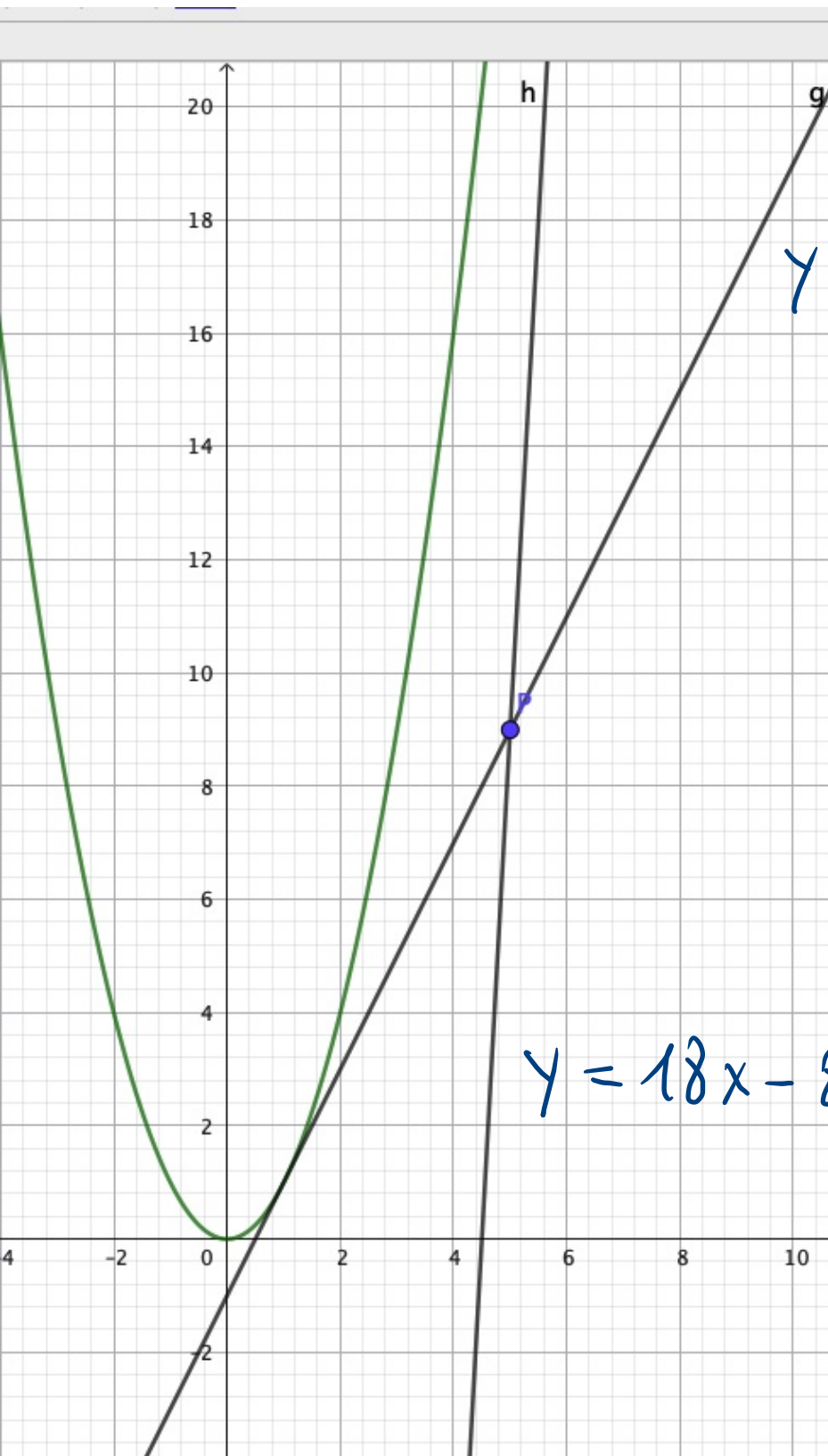
$$a^2 - 10a + 9 = 0$$

$$(a - 9)(a - 1) = 0$$

$A_1(1; 1)$ et $A_2(9, 81)$

Les deux tangentes : $(t_1): y = 2x - 1$

$(t_2): y = 18x - 81$

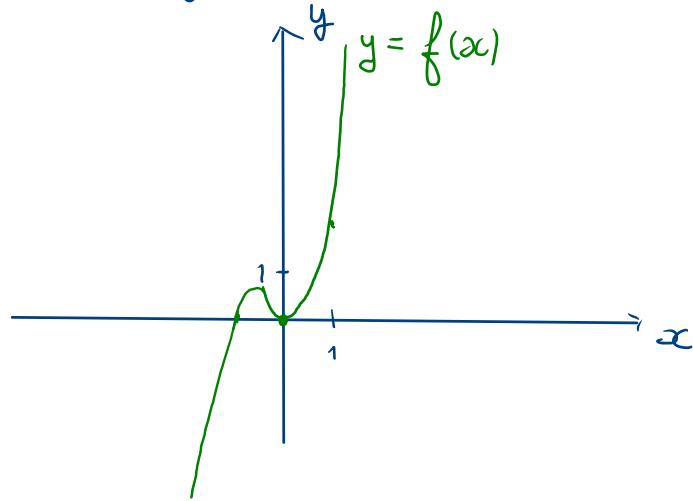


$$y = 2x - 1$$

$$y = 18x - 81$$

2.9.24 Quels sont les points de la courbe $y = x^3 + x^2$ en lesquels la tangente passe par l'origine ?

Posons $f(x) = x^3 + x^2 = x^2(x+1)$



x	-1	0
f(x)	-	+

1) $f'(x) = 3x^2 + 2x$

2) Soit $A(a; a^3 + a^2)$ le point cherché.

3) La tangente s'écrit $y = mx$

On sait que $m = 3a^2 + 2a$. Donc $y = (3a^2 + 2a)x$

4) Cette tangente passe par A :

$$a^3 + a^2 = (3a^2 + 2a)a$$

$$a^3 + a^2 = 3a^3 + 2a^2$$

$$2a^3 + a^2 = 0$$

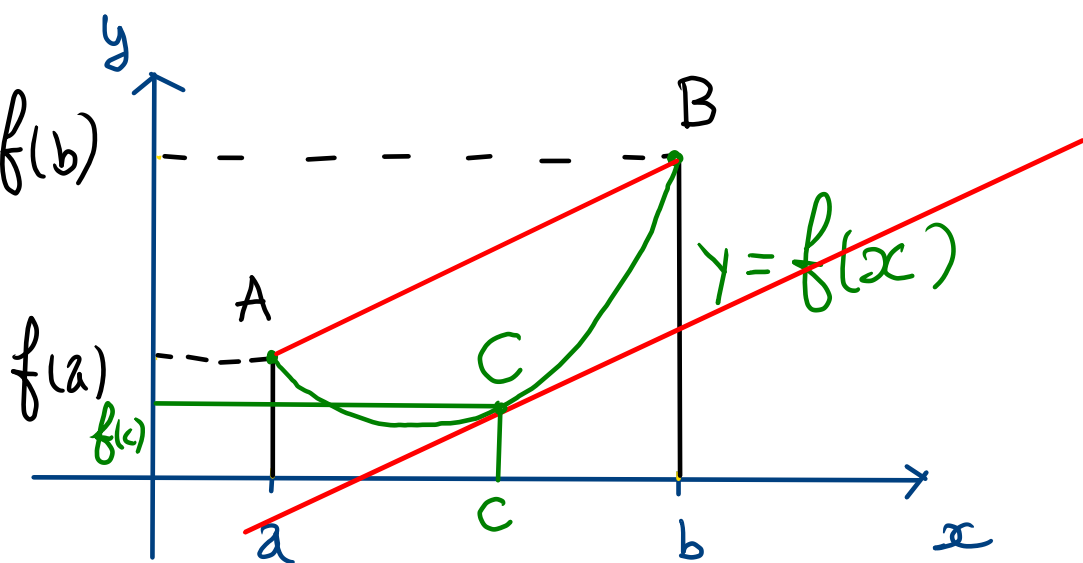
$$a^2(2a + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Les points cherchés sont $A_1(0,0)$ et $A_2(-\frac{1}{2}; \frac{1}{8})$

Théorème des accroissements finis (TAF)

Soit une fonction ~~continue et~~ dérivable sur un intervalle $[a, b]$.

Il existe $c \in [a, b]$ tel que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$



pente de la
parallèle

pente de la
droite AB

Théorème de BH

Le but est de calculer des limites indéterminées,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} \text{"0"} \\ \text{"0"} \\ \text{"}\infty\text{"} \\ \text{"}\infty\text{"} \end{cases}$$

On a :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\frac{g(x) - g(a)}{x - a}} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$f(a) = g(a) = 0$$

Done

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Example :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 4x - 5} \stackrel{\text{Ind}}{=} \frac{0}{0} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-2)}{(x+5)(x-1)} = \frac{-1}{6}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 4x - 5} \stackrel{\text{BH}}{=} \frac{0}{0} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 3}{2x + 4} = \frac{-1}{6}$$

2.10.1 Calculer les limites suivantes :

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 2x^2 + x}{x^2 - 3x}$

b) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 2x - 3}{2x^2 + 3x - 9}$

c) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{\sqrt[3]{x + 4} - 2}$

d) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3 - \sqrt{x + 6}}{\sqrt{x + 1} - 2}$