

2.10.8 Déterminer l'équation de la tangente à la courbe $y = x^3 - 3x^2$ en son point d'inflexion.

$$f(x) = x^3 - 3x^2$$

$$ED(f) = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x$$

$$ED(f') = \mathbb{R}$$

$$f''(x) = 6x - 6$$

$$ED(f'') = \mathbb{R}$$

Tableau de la courbure :

x		
	1	
$f''(x)$	- 0 +	
$f(x)$	  	

$$p_i : I(1; -2)$$

$$f(1) = -2$$

Déterminons la tangente en I :

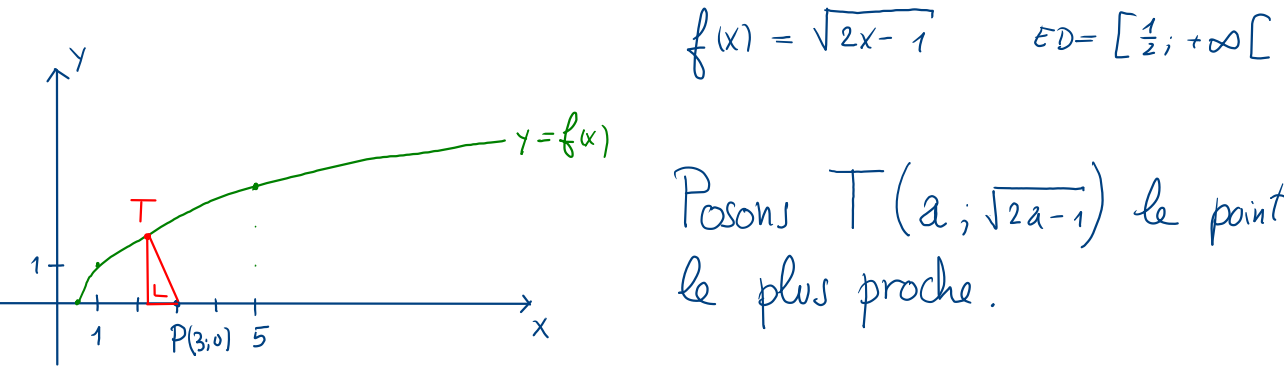
$$y = \underbrace{f'(1)}_{\text{pente}} x + h$$

$$\Rightarrow y = -3x + h$$

$$I(1; -2) \Rightarrow \underline{-2} = -3 \cdot \underline{1} + h \Rightarrow h = 1$$

$$\Rightarrow y = -3x + 1$$

2.10.18 Quel est le point de la courbe $y = \sqrt{2x-1}$ qui est le plus proche du point $P(3;0)$?

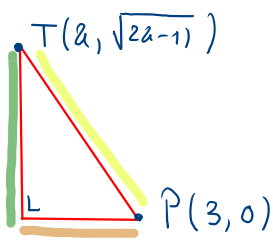


$$f(x) = \sqrt{2x-1} \quad ED = \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$$

Posons $T(a; \sqrt{2a-1})$ le point le plus proche.

Calculons la distance de P à T .

$$PT = \sqrt{(\sqrt{2a-1})^2 + (a-3)^2}$$



On cherche le minimum de la fonction

$$d(a) = \sqrt{(2a-1) + (a^2-6a+9)}$$

$$d(a) = \sqrt{a^2-4a+8}$$

contrainte $a \geq \frac{1}{2}$

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

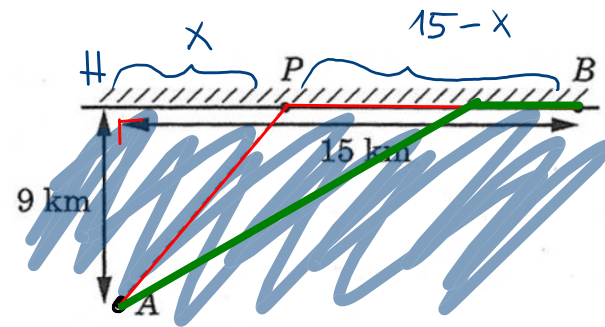
$$d'(a) = \frac{2a-4}{2\sqrt{a^2-4a+8}} = \frac{\cancel{2}(a-2)}{\cancel{2}\sqrt{a^2-4a+8}}$$

Tableau de la croissance

a	$\frac{1}{2}$	2
$d'(a)$	-	- 0 +
$d(a)$	Max $\frac{3}{2}$	Min

Min $(2; \sqrt{3})$

2.10.23 Le gardien d'un phare (point A) doit rejoindre le plus rapidement possible la maison côtière (point B). Il se déplace en canot à la vitesse de 4 km/h et à pied à la vitesse de 5 km/h. Où doit-il accoster (point P) pour que le temps de parcours soit minimal? La côte est supposée rectiligne.



$$AP = \sqrt{15^2 + 9^2} = \sqrt{306}$$

$$\frac{\sqrt{306}}{4} \approx 4,37$$

$$d = v \cdot t \quad ; \quad v = \frac{d}{t} \quad , \quad t = \frac{d}{v}$$

$$1) \quad AP = \sqrt{9^2 + x^2} = \sqrt{x^2 + 81}$$

$$0 \leq x \leq 15$$

$$2) \quad PB = 15 - x$$

La fonction qui donne le temps en fonction de x :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 81}}{4} + \frac{15 - x}{5}$$

$$f(x) = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{x^2 + 81} + 3 - \frac{x}{5}$$

$$f'(x) = \frac{1}{4} \left(\sqrt{x^2 + 81} \right)' - \frac{1}{5}$$

$$= \frac{1}{4} \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2 + 81}} - \frac{1}{5} = \frac{x}{4\sqrt{x^2 + 81}} - \frac{1}{5}$$

$$f'(x) = \frac{5x - 4\sqrt{x^2 + 81}}{20\sqrt{x^2 + 81}}$$

$$0 \leq x \leq 15$$

$$f'(x) = \frac{5x - 4\sqrt{x^2 + 81}}{20\sqrt{x^2 + 81}}$$

Cherchons ses zéros:

$$5x = 4\sqrt{x^2 + 81}$$

$$0 \leq x \leq 15$$

$$25x^2 = 16(x^2 + 81)$$

$$9x^2 = 16 \cdot 81$$

$$x^2 = 144 \Rightarrow x = \pm 12$$

Donc $x = 12$. Ici, on obtient un minimum

x	0	12	15
$f'(x)$	$\swarrow$	$- \quad 0 \quad +$	$\swarrow$
$f(x)$	$\swarrow$ max	$\searrow$ min $\nearrow$ max	$\swarrow$

min est atteint
lorsque $x = 12$

$$f(12) = \frac{\sqrt{144 + 81}}{4} + \frac{3}{5} = \frac{15}{4} + \frac{3}{5} = \frac{87}{20} = 4,35 \text{ [h]}$$