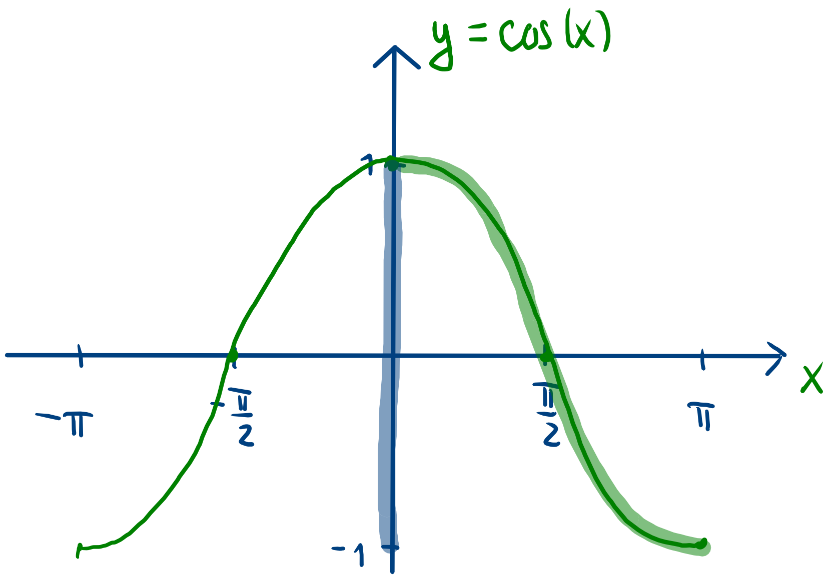
2.4.3 Déterminer l'ensemble de définition et l'ensemble d'arrivée pour que les fonctions suivantes soient des bijections. Puis donner leur réciproque.

d) $f(x) = \cos(x)$
e) $f(x) = \tan(x)$
f) $f(x) = \sin(2\,x)$



d) $f : [0 ; \pi] \longrightarrow [-1 ; 1]$

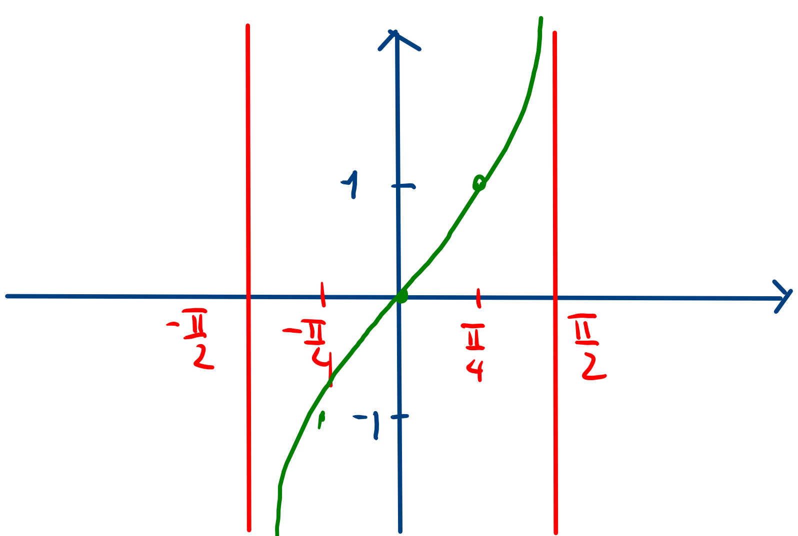
05.11.25

$x \longmapsto \cos(x)$

$^r f : [-1 ; 1] \longmapsto [0 ; \pi]$

$y \longmapsto \arccos(y)$

e) $f : x \longmapsto \tan(x)$

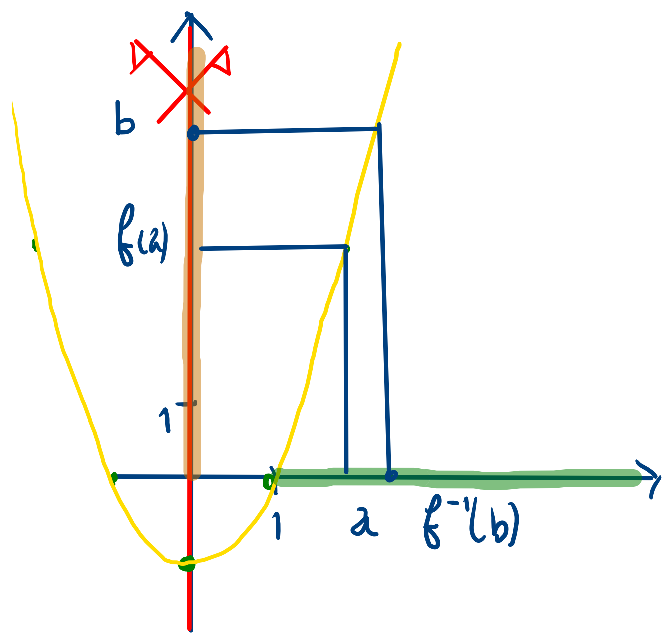


$f : \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}$

$^r f : \mathbb{R} \longrightarrow \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$

$y \longmapsto \arctan(y)$

2.4.5 Soit $f : [1; +\infty[\to [0; +\infty[$ telle que $f(x) = x^2 - 1$. La fonction f est-elle bijective ?



Sommet : $(0; -1)$

① Injectif : $a, b \in [1; +\infty[$. Si $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$

$$f(a) = f(b) \Rightarrow a^2 - 1 = b^2 - 1 \Rightarrow a^2 = b^2 \underset{a,b \geq 1}{\Rightarrow} a = b$$

② Surjectif : $y \in [0; +\infty[$. Trouvons $x \in [1; +\infty[$ tel que $f(x) = y$

$$x^2 - 1 = y \Rightarrow x^2 = \underbrace{y + 1}_{\geq 1} \Rightarrow x = \underbrace{\sqrt{y+1}}_{\geq 1}$$

En effet $f(\sqrt{y+1}) = y + 1 - 1 = y$

Suites

Une suite est une application de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$.

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$n \longmapsto f(n)$$

$f(n)$ est appelé le $n^{\text{ème}}$ terme de la suite

2.5.1 Calculer les quatre premiers termes des suites :

a) $\dfrac{n}{n+2}$, avec $n \geq 1$

b) $1 + (-1)^n$, avec $n \geq 1$

c) $n \sin\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$, avec $n \geq 1$

d) $\sqrt{n^2+3n} - n$, avec $n \geq 1$

explicite

On note les suites ainsi : $(x_n)_{n \geq 1}$ où $x_n = \dfrac{n}{n+2}$

$x_1 = \dfrac{1}{3}$; $x_2 = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$; $x_3 = \dfrac{3}{5}$; $x_4 = \dfrac{4}{4+2} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$

2.5.2 Calculer les quatre premiers termes des suites :

a) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 2a_n + 1 \text{ , si } n \geq 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n - 2}{3} \text{ , si } n \geq 1 \end{cases}$

récursive

- $a_1 = 1$
- $a_2 = a_{1+1} = 2 \cdot a_1 + 1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$
- $a_3 = a_{2+1} = 2 \cdot a_2 + 1 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$
- $a_4 = 2 \cdot 7 + 1 = 15$

$(a_n)_{n \geq 1} = (1 ; 3 ; 7 ; 15 ; \ldots)$