

06.02.25

2.10.1 Calculer les limites suivantes :

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 2x^2 + x}{x^2 - 3x}$

b) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 2x - 3}{2x^2 + 3x - 9}$

c) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{\sqrt[3]{x + 4} - 2}$

d) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3 - \sqrt{x + 6}}{\sqrt{x + 1} - 2}$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(3x) - 1}{x^2}$

f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x - \sin(x)}$

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 2x^2 + x}{x^2 - 3x} \stackrel{\text{BH}}{=} \frac{0}{0} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 4x + 1}{2x - 3} = -\frac{1}{3}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 2x - 3}{2x^2 + 3x - 9} \stackrel{\text{BH}}{=} \frac{0}{0} \quad \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x + 2}{4x + 3} = \frac{4}{9}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{\sqrt[3]{x + 4} - 2} \stackrel{\text{BH}}{=} \frac{0}{0} \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{\frac{1}{3} (x + 4)^{-2/3}} = \frac{1}{\frac{1}{3} 8^{-2/3}} = \frac{8^{2/3}}{\frac{1}{3}}$$

$$\downarrow$$

$$\left[(x + 4)^{1/3} \right]' = \frac{1}{3} (x + 4)^{-2/3} \cdot 1 \quad \left. \vphantom{\left[(x + 4)^{1/3} \right]'} \right\} = 3 \cdot 8^{2/3} = 12$$

$$= 3 \cdot \sqrt[3]{8^2}$$

$$= 3 (\sqrt{8})^2$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3 - \sqrt{x+6}}{\sqrt{x+1} - 2} \quad \underline{\underline{\text{BH}}} \quad \underline{\underline{\frac{0}{0}}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x+6}}}{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}} = \frac{-\frac{1}{6}}{\frac{1}{4}}$$

$$(\sqrt{x+6})' = \frac{1}{2\sqrt{x+6}}$$

$$(\sqrt{x+1})' = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

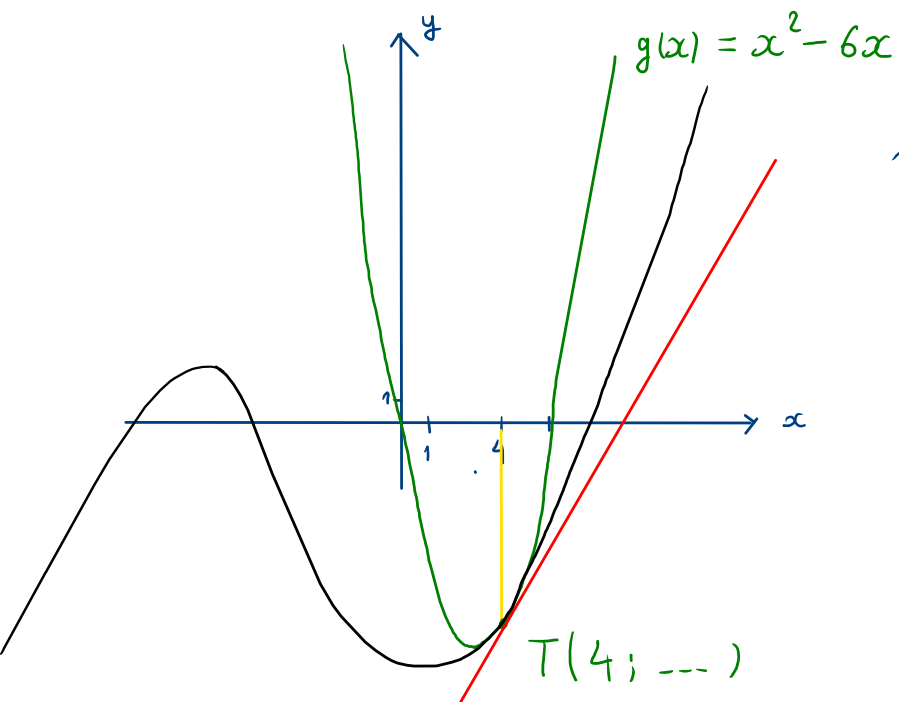
$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

}

$$= \frac{-1}{6} \cdot \frac{4}{1} = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3}$$

2.9.26 Déterminer les nombres réels a et b pour lesquels les courbes $y = x^3 + ax^2 + bx$ et $y = x^2 - 6x$ sont tangentes en un point d'abscisse 4.

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx$$



1°) Déterminer la pente de la tangente à $y = x^2 - 6x$ en $T(4; -8)$

$$g'(x) = 2x - 6.$$

$$g'(4) = 2$$

2°) $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

D'où le système :

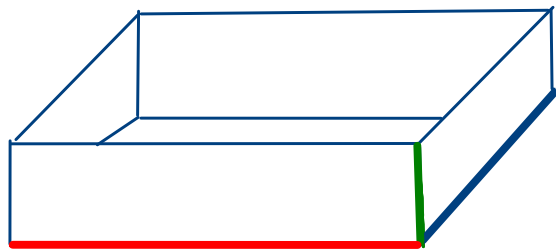
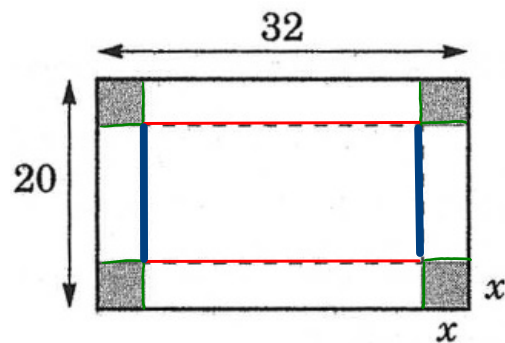
$$f(4) = -8 \quad : \quad 64 + 16a + 4b = -8$$

$$f'(4) = 2 \quad : \quad 48 + 8a + b = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 16a + 4b = -72 \\ 8a + b = -46 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a + b = -18 \\ 8a + b = -46 \end{cases} \begin{array}{c|c} b & a \\ \hline \cdot (-1) & \cdot (-2) \\ 1 & 1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4a = -28 \\ -b = -10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -7 \\ b = 10 \end{cases}$$

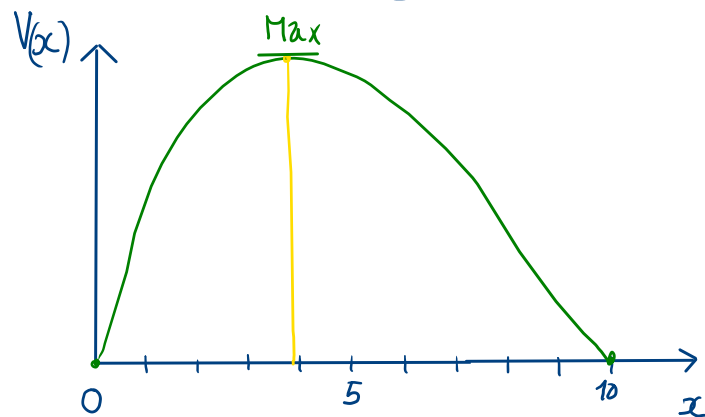
2.10.14 On construit une boîte rectangulaire sans couvercle en découpant quatre carrés aux coins d'une feuille de carton mesurant 32 cm sur 20 cm et en relevant ensuite les rectangles latéraux. Quelle doit être la dimension du carré enlevé pour obtenir la boîte de volume maximal ?



$$V(x) = x(32 - 2x)(20 - 2x), \text{ avec } 0 < x < 10$$

$$V:]0; 10[\longrightarrow \mathbb{R}_+^*$$

$$x \longmapsto 4x^3 - 104x^2 + 640x$$



Comme $\lim_{x \rightarrow 0} V(x) = \lim_{x \rightarrow 10} V(x) = 0$,

la fonction admet un max sur $]0; 10[$

Le max est atteint quand $V'(x) = 0$

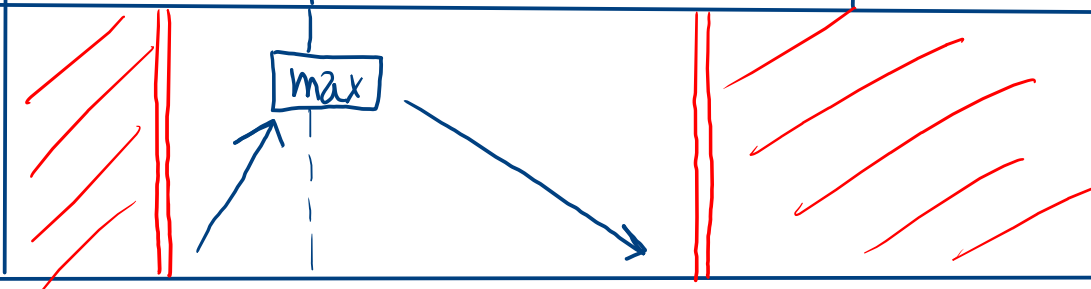
Déterminons les zéros de $V'(x)$:

$$V'(x) = 12x^2 - 208x + 640$$

$$\Delta = 12544 = 112^2$$

$$x_1 = 4 \qquad x_2 = \frac{40}{3} > 10 \quad \text{ne convient pas.}$$

Pour montrer que $x = 4$ est le max, on établit le tableau de la croissance.

x	0	4	10	$\frac{40}{3}$	
$V'(x)$	+	0	-	0	+
$V(x)$					
	croissante		décroissante		

Le volume est maximal lorsque $x = 4$