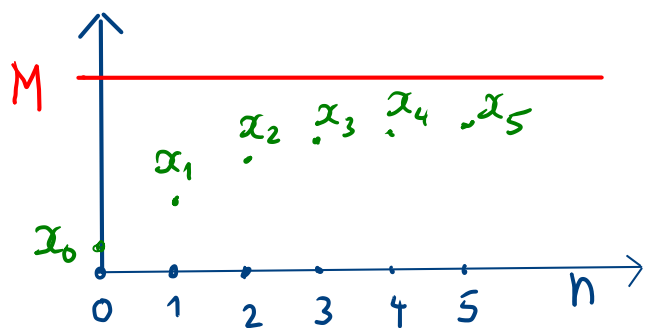


Suites majorées, mineurées et bornées.

- ① Une suite (x_n) est majorée s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $x_n \leq M$. M est appelé un majorant de la suite



- ② Une suite (x_n) est mineurée s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $x_n \geq m$. m est appelé un minorant de la suite
- ③ Une suite (x_n) mineurée et majorée est dite bornée.

Une suite (x_n) est bornée si et seulement s'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $|x_n| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$

Suites croissantes, décroissantes

- ④ Une suite (x_n) est croissante si pour tout $p, q \in \mathbb{N}$
avec $p < q$, on a $x_p \leq x_q$.
- ⑤ Une suite (x_n) est décroissante si pour tout $p, q \in \mathbb{N}$
avec $p < q$, on a $x_p \geq x_q$.

Résumé :

croissante	$x_{n+1} \geq x_n$
décroissante	$x_{n+1} \leq x_n$

2.5.4 Les suites ci-dessous sont-elles minorées, majorées, bornées, croissantes, décroissantes ?

a) $a_n = 2 - \frac{1}{n^2}$, avec $n \geq 1$

b) $b_n = -n!$, avec $n \geq 1$

$$a) \quad a_1 = \underline{1} ; \quad a_2 = 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4} = \underline{1,75} ; \quad a_3 = 2 - \frac{1}{9} = \frac{17}{9} = 1,8 ;$$
$$(a_n) = \left(1 ; \frac{7}{4} ; \dots \right)$$

$$\left. \begin{array}{l} 1) \text{ minorant } m=1 : a_n \geq 1 \\ 2) \text{ majorant } M=2 : a_n \leq 2 \end{array} \right\} \quad 1 \leq a_n \leq 2 \Rightarrow \text{bornée'}$$

3) croissante ou décroissante :

$$\begin{aligned} \underline{a_{n+1}} - \underline{a_n} &= \left(2 - \frac{1}{(n+1)^2} \right) - \left(2 - \frac{1}{n^2} \right) \\ &= \cancel{2} - \frac{1}{(n+1)^2} - \cancel{2} + \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{(n+1)^2 - n^2}{n^2(n+1)^2} \\ &= \frac{n^2 + 2n + 1 - n^2}{n^2(n+1)^2} = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} > 0 \\ &\Rightarrow a_{n+1} > a_n \Rightarrow \text{strictement croissante} \end{aligned}$$

Une suite croissante et bornée est
convergente (ie qu'elle admet une limite)

id est

Dans ce cas :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$$

b) $b_n = -n!$, avec $n \geq 1$ $(-1; -2; -6, -24, \dots)$

$$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$$

$$b_n = -1 \cdot (n!)$$

1) $\left. \begin{array}{ll} \text{Majorée :} & M = -1 \\ \text{Minoree :} & \text{non minoree} \end{array} \right\} \text{ pas bornée}$

$$b_{n+1} - b_n = -(n+1)! - [- (n!)] = n! - (n+1)!$$

$$= n! [1 - (n+1)] = n! (-n) < 0 \Rightarrow \text{strictement décroissante}$$

$$\begin{aligned} (n+1)! &= (n+1) \cdot n! \\ 7! &= 7 \cdot 6! \end{aligned}$$

c) $c_n = 2n^2 - 7n$, avec $n \geq 2$

$$(C_n) = (-6, -3, 4, 15, \dots)$$

- minoree : $m = -6$
 - pas majoree : $n(2n - 7) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$
- } pas bornee'

$$\underline{C_{n+1}} - \underline{C_n} = \underline{[2(n+1)^2 - 7(n+1)]} - \underline{[2n^2 - 7n]}$$

$$= \cancel{2n^2} + 4n + 2 - \cancel{7n} - 7 - \cancel{2n^2} + \cancel{7n} = 4n - 5 \geq 0 \text{ si } n \geq 2$$

(C_n) croissante

d) $d_n = \frac{n}{n^2 + 10}$, avec $n \geq 3$

$$(d_n) = \left(\frac{3}{19}, \frac{4}{26}, \frac{5}{35}, \frac{6}{46}, \dots \right)$$

$$= \left(\frac{3}{19}, \frac{2}{13}, \frac{1}{7}, \frac{3}{23}, \dots \right)$$

• minoree : $m = 0$

• majoree : $M = 1$

• $d_{n+1} - d_n = \frac{n+1}{(n+1)^2 + 10} - \frac{n}{n^2 + 10}$

$$= \frac{n+1}{n^2 + 2n + 11} - \frac{n}{n^2 + 10} = \frac{(n+1)(n^2 + 10) - n(n^2 + 2n + 11)}{(n^2 + 2n + 11)(n^2 + 10)}$$

$$= \frac{\cancel{n^3} + 10n + n^2 + 10 - \cancel{n^3} - 2n^2 - 11n}{(n^2 + 2n + 11)(n^2 + 10)} = \frac{-n^2 - n + 10}{(n^2 + 2n + 11)(n^2 + 10)}$$

Etudions le signe de $-n^2 - n + 10$.

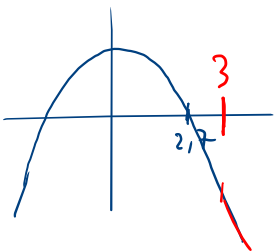
Ses zéros : $-n^2 - n + 10 = 0$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 10 = 41$$

$$n = \frac{1 \pm \sqrt{41}}{-2} \begin{cases} + & 2.7 \\ - & \text{impossible} \end{cases}$$

décroissante

$$\Rightarrow -n^2 - n + 10 < 0 \text{ pour } n \geq 3$$



e) $e_n = 3^{1+(-1)^n}$, avec $n \geq 1$

$$(e_n) = (1, 9, 1, 9, \dots)$$

$$e_n = \begin{cases} 1 & , \text{ si } n \text{ est impair} \\ 9 & , \text{ si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

- majoré par 9
- minoré par 1
- ni croissante, ni décroissante,